

Nina UTSCH, Gießen

Praktiken der Aufgabenbearbeitung von Lehramtsstudierenden in der Analysis I

Das Bearbeiten von mathematischen Übungsaufgaben ist ein wichtiger Bestandteil des Mathematikstudiums. In universitären Veranstaltungen wird erwartet, dass Studierende die in der Vorlesung behandelten Sätze und Definitionen in ihren Bearbeitungen dieser Aufgaben nutzen. Um das Lernen der Studierenden beschreiben zu können, führten Tall und Vinner (1981) die Theorie des Concept Images und der Concept Definition ein. Untersuchungen zeigen, dass das individuelle Concept Image der Lernenden nicht immer zu der Concept Definition passt (z. B. ebd.). Inwiefern Studierende ihr Concept Image beim Bearbeiten von Aufgaben nutzen und inwiefern sie dieses mit einer formalen Aufgabenbearbeitung mit Bezug zur Concept Definition vernetzen, wurde in einer qualitativen Studie an der JLU Gießen untersucht. Um die bei der Aufgabenbearbeitung ablaufenden Prozesse angemessen beschreiben zu können, wurde die Theorie adaptiert und die Concept Definition um weitere formale Handlungen wie das deduktive Schließen mit Sätzen ergänzt (Utsch & Lengnink, in Druck). In der Studie wurden Lehramtsstudierende gebeten, vier Aufgaben zur Folgenkonvergenz mit der Methode des lauten Denkens zu bearbeiten. Die Lernprozesse der Studierenden beim Bearbeiten der Aufgaben wurden in einem zweistufigen Vorgehen ausgewertet: Zuerst wurde eine qualitative Inhaltsanalyse durchgeführt und die Codierung in sogenannten *Prozessmatrizen* visualisiert. Mithilfe dieser Prozessmatrizen konnten Transkripte ausgewählt werden, die mit einem interpretativen Vorgehen in Anlehnung an die Objektive Hermeneutik analysiert wurden. So konnten Praktiken der Aufgabenbearbeitungen rekonstruiert werden, die auf eine Vernetzung von Concept Image und Concept Definition hinweisen. Mit Praktiken sind keine einzelnen, individuellen Handlungen gemeint, sondern ein umfassenderes, in der Untersuchungsgruppe geteiltes und routiniertes Bündel von Aktivitäten (Reckwitz, 2003).

Qualitative Studie

An der Studie im Sommersemester 2019 und Wintersemester 2020 haben insgesamt sieben Studierende des Realschullehramts und 19 Studierende des Gymnasiallehramts teilgenommen. Alle Studierenden besuchten zu dem Zeitpunkt der Studie eine Analysis-Veranstaltung ihres Studiengangs und waren im dritten oder vierten Fachsemester. Die Studierenden wurden zunächst in die Methode des lauten Denkens eingeführt und bearbeiteten daraufhin vier mathematische Übungsaufgaben zur Folgenkonvergenz mit lau-

tem Denken. Da die kognitiven Prozesse der Studierenden während der Aufgabenbearbeitung nicht direkt beobachtet werden können, bietet diese Methode eine Möglichkeit, Einblicke in die kognitiven Prozesse zu erhalten.

Bei der Konzeption der vier Aufgaben wurde berücksichtigt, dass deren Bearbeitungen zum einen Einblicke in das Concept Image der Studierenden geben sollen und zum anderen eine Bearbeitung mit Bezug zur Concept Definition ermöglichen. Des Weiteren sollen die vier Aufgaben repräsentativ für hochschulmathematische Aufgaben in der Analysis I sein. In der dritten Aufgabe beschäftigen sich die Studierenden beispielsweise mit einer Folge, die durch die Permutation der Folgenglieder einer konvergenten Folge entsteht (siehe Utsch & Lengnink, in Druck). Alle Aufgabenbearbeitungsprozesse wurden videographiert und anschließend transkribiert.

Zweistufiges Vorgehen in der Auswertung

Zur Auswertung der Bearbeitungsprozesse hat sich ein zweistufiges Vorgehen mit einer Übersichts- und einer Detailanalyse angeboten. Da über 50 Stunden Videomaterial entstanden sind, wurde zunächst eine Übersichtsanalyse mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) durchgeführt.

Es wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das zum einen Kategorien zu möglichen individuellen Vorstellungen der Lernenden, graphischen Darstellungen und der Beispielnutzung enthält. Diese Kategorien entsprechen möglichen theoretischen Bestandteilen des Concept Images eines Lernenden und sind in Abb. 1 blau hinterlegt. Zum anderen enthält das Kategoriensystem Kategorien zur Verwendung der Concept Definition, wozu der Umgang mit der Formal Concept Definition und weitere formale Handlungen wie das Verwenden von Sätzen oder mathematischen Symbolen gehört. Diese sind in Abb. 1 grau gekennzeichnet. Um die entstandenen Transkripte zu codieren, wurden diese in Codiereinheiten unterteilt. Die Codiereinheiten werden durch eine Änderung der Tätigkeit oder des mathematischen Inhalts abgegrenzt. Eine neue Codiereinheit beginnt auch dann, wenn neue Überlegungen angestellt werden, ohne dass sich die Tätigkeit oder der mathematische Inhalt ändert, etwa wenn ein zusätzliches Beispiel gegeben wird. Jeder Codiereinheit werden eine oder mehrere Kategorien zugeordnet. Die Zuordnung wurde von zwei unabhängigen Codiererinnen vorgenommen.

Das Kategoriensystem wurde um eine zeitliche Achse ergänzt, die durch die Einteilung der Codiereinheiten festgelegt wird. So entsteht eine Matrix, die im Folgenden als *Prozessmatrix* bezeichnet wird. Mithilfe dieser Prozessmatrizen ist es möglich, die individuellen Bearbeitungsprozesse der Studierenden zu visualisieren und strukturell zu vergleichen (siehe Abb. 1). Die

Prozessmatrizen können Hinweise geben, ob das Concept Image der Studierenden während der Bearbeitung mit der Concept Definition vernetzt wurde. In Abbildung 1 zeigt sich beispielsweise, dass die Kategorien *Vorstellungen*, *Graphische Darstellung* und *Definition* zu Beginn gleichzeitig codiert wurden, was auf ein Zusammenspiel von Concept Image und Concept Definition hinweist.

Student 19		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Vorstellung	Annäherungsvorstellung				1															
	Umgebungsvorstellung				1	1	1													
	Grenzwert als Schranke																			
	Grenzwert als letztes Folgenglied																			
	Grenzwert darf nicht angenommen werden																			
	"nach jedem Punkt immer weiter annähern"-Vorst.																			
	"im Unendlichen"-Vorstellung																			
	Abstandsvorstellung																			
Mentale Bilder																				
Verwandte Begriffe																				
Beispiele																				
Eigenschaften																				
Graphische Darstellung				1	1	1	1	1												
Numerische Darstellung																				
Begriffsverwendung																				
Umgang mit Quantoren, Symbolen und algebraischen Ausdrücken											1	1	1	1						1
Mathematische Sätze	Suche nach oder Frage zu einem Satz																			
	Nennen eines Satzes																			
Definition verwandter Begriffe																				
Definition von Folgenkonvergenz	Frage zur Definition																			
	Nachlesen der Definition									1							1			
	Verwenden von einzelnen formalen Elementen oder Teilen der Definition				1	1	1				1	1						1	1	
	Diagrammatisches Schließen mit Bezug zur Def.												1	1	1					1

Abb. 1: Prozessmatrix von Student 19 zu Aufgabe 3

Die Prozessmatrizen aller Studierenden wurden bezüglich solcher Vernetzungen untersucht und in Gruppen zusammengefasst. Die oben beschriebene Vernetzung von Vorstellungen, graphischen Darstellungen und der Definition zeigt sich bei Aufgabe 3 beispielsweise bei 11 der 26 Studierenden. Darüber hinaus zeigt sich diese Vernetzung auch in den Bearbeitungen der anderen Aufgaben der Studie. Es kann folglich von einem umfassenderen, in der Untersuchungsgruppe geteilten und routiniertem Bündel von Aktivitäten, also einer *Praktik der Aufgabenbearbeitung*, gesprochen werden.

Neben der Verbindung von Vorstellungen, graphischen Darstellungen und der Definition zeigen sich in den Prozessmatrizen vor allem zwei weitere Praktiken: 16 Studierende verwenden mathematische Sätze und verbinden diese mit verwandten Begriffen, während es vier Studierenden nicht gelingt, formal zu arbeiten und Definitionen und Sätze in ihre Aufgabenbearbeitung einzubeziehen (Utsch, in Druck). Fünf Studierende zeigen in ihren Prozessmatrizen beide Praktiken und vernetzen in einem Abschnitt der Matrix mathematische Sätze mit verwandten Begriffen und in einem weiteren Abschnitt die Definition mit Vorstellungen und graphischen Darstellungen, weshalb diese Studierenden oben doppelt gezählt wurden.

Alle drei identifizierten Praktiken sollten in der Lehre berücksichtigt werden. Die Praktik der Vernetzung von Vorstellungen, graphischen Darstellungen und der Definition könnte beispielsweise in Veranstaltungen berücksichtigt

werden, indem bei der wöchentlichen Hausaufgabenabgabe explizit die entstandenen Darstellungen eingefordert und zurückgemeldet werden. Diese Darstellungen und die so gewonnen Einblicke in die Vorstellungen könnten dann in der Vorlesung oder in Übungen aufgegriffen und gemeinsam weiterentwickelt werden.

Die Praktiken konnten als strukturelle Auffälligkeiten in den Prozessmatrizen herausgearbeitet werden. Um die identifizierten Praktiken inhaltlich beschreiben zu können, wurden im Rahmen einer sich anschließenden Detailanalyse ausgewählte Transkripte interpretiert. Für die Interpretation haben sich stets mehrere Forschende (digital) getroffen und zu jeder Codiereinheit mehrere Deutungshypothesen aufgestellt. Dabei wurden die möglichen Deutungen protokolliert und an weiteren Transkriptstellen überprüft. Diese Detailanalyse ermöglicht, das Zusammenspiel von Concept Image und Concept Definition inhaltlich zu beschreiben. Dabei wird beispielsweise für Student 19 untersucht, welche Vorstellungen sichtbar werden und inwiefern diese mathematisch passend sind. Durch die Interpretation soll herausgearbeitet werden, welchen Nutzen das Erstellen der graphischen Darstellung für Student 19 bei der Bearbeitung dieser Aufgabe hat und inwiefern diese Darstellung das Verwenden der Formal Concept Definition beeinflusst. Fachliche Auffälligkeiten wie ein nicht-passendes Verständnis der Definition oder eines Satzes können im Rahmen der Detailanalyse ebenfalls identifiziert werden. Die Detailanalyse ermöglicht folglich eine inhaltliche Beschreibung der Praktiken und stellt eine wichtige Ergänzung des ersten Analyseschrittes mithilfe der Prozessmatrizen dar. Auf Basis der Ergebnisse der Detailanalyse können außerdem Ansätze zur Förderung der Studierenden abgeleitet und diskutiert werden.

Literatur

- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. 12., überarbeitete Auflage. Beltz Verlag.
- Reckwitz, A. (2003). Grundelemente einer Theorie sozialer Praktiken. Eine sozialtheoretische Perspektive. *Zeitschrift für Soziologie*, 32 (4), 282–301.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Utsch, N. & Lengnink, K. (in Druck). Prozesspfade zur Analyse des Zusammenspiels von Concept Image und Concept Definition in Studierendenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz. In: C. Bescherer & M. Zimmermann: *Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 15. & 16. November 2019 an der PH Ludwigsburg*.
- Utsch, N. (in Druck). Interplay between Concept Image and Concept Definition in Students' Work on Convergence of Sequences. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*.