Anna-Katharina ROOS, Dortmund & Leander KEMPEN, Dortmund

Das Streifenmodell: Ein Modell zum Umformen und Lösen von Gleichungen

Modelle zur Erarbeitung von Gleichungsumformungen

Das Umformen und Lösen von Gleichungen geht mit verschiedenen Schwierigkeiten seitens der Lernenden einher (z. B. Kieran, 2006). In der Literatur werden verschiede Vorschläge unterbreitet, mit welchen Modellen (etwa dem Waage-Modell) man entsprechende Gleichungsumformungen zum Auflösen nach der gesuchten Variablen unterstützen und entsprechende inhaltliche Vorstellungen aufbauen kann (etwa Filloy & Rojano, 1989). Allerdings sind mit den verschiedenen Modellen auch charakteristische Probleme und Hürden verbunden (Arcavi et al., 2017; speziell für das Waage-Modell siehe auch Vlassis, 2002). Malle (1993) schlägt als Alternative das Streifenmodell vor, um Gleichungsumformungen zu motivieren (siehe Abb. 1). Bei diesem Modell ergeben sich gewisse Ähnlichkeiten zum sogenannten „Bar Model", dass etwa in Singapur sehr verbreitet ist (Ng & Lee, 2009). In diesem Beitrag möchten wir anknüpfend an und in Weiterführung der Vorschläge von Malle das Streifenmodell als alternatives Modell zum Umformen und Lösen von Gleichungen vorstellen.

Grundlagen zum Streifenmodell

In einem Streifenmodell werden die Zahlen (und Variablen) durch Streifen mit entsprechenden Längen dargestellt (siehe Abb. 1). Der obere bzw. untere Streifen entsprechen dabei jeweils den Termen auf der rechten bzw. linken Seite einer Gleichung; die Gleichheit der beteiligten Terme wird dadurch dargestellt, dass beide Streifen insgesamt gleich lang sind. Die mathematischen Grundoperationen werden in naher Anbindung an die jeweiligen Grundvorstellungen im Streifenmodell verwendet: Addieren wird dargestellt durch Aneinander- oder Hintereinanderlegen von Streifen, Subtrahieren durch Wegnehmen oder Ergänzen eines Streifens, Multiplikation durch Skalieren bzw. Vervielfältigen, und Division kann nach den Grundvorstellungen des Aufteilens und Verteilens dargestellt werden.

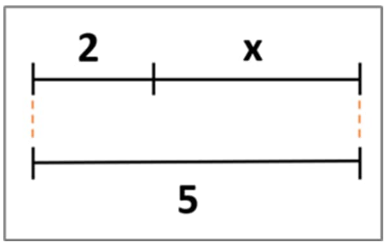


Abb. 1: Ein Streifenmodell

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Zwei Ansätze zum Arbeiten mit dem Streifenmodell

Es lassen sich zwei grundlegende Denkweisen bezüglich der Gleichungsumformungen unterscheiden: Die Waage- und die Elementarumformungsregeln (siehe Tab. 1; nach Malle, 1993).

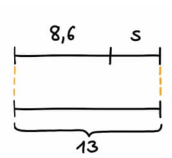
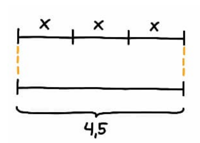
Waageregeln (‚auf beiden Seiten das Gleiche machen‘)	**Elementarumformungsregeln** (‚etwas mit der Umkehroperation auf die andere Seite bringen‘)
$A + B = C$ $\Leftrightarrow A + B - B = C - B$ $\Leftrightarrow A = C - B$	$A + B = C$ $\Leftrightarrow A = C - B$

Tab. 1: Waage- und Elementarumformungsregeln

Beide Regeln lassen sich aus dem Streifenmodell ableiten, bringen allerdings unterschiedliche Verwendungsweisen mit sich.

Das Streifenmodell für die Deutung der Elementarumformungsregeln

Die Elementarumformungen können aus dem Streifenmodell abgeleitet werden, indem jeweils die zueinander passenden Additions- bzw. Subtraktions-Gleichungen oder Multiplikations- bzw. Divisions-Gleichungen als Beschreibungen desselben Streifenmodells gedeutet werden (siehe Tab. 2).

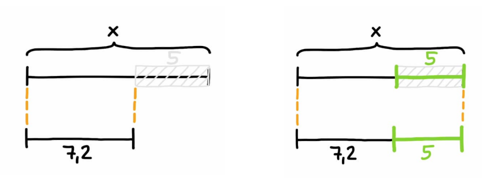
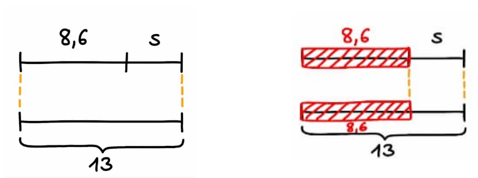
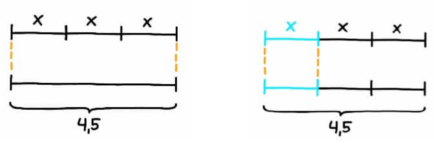
Addition / Subtraktion		**Multiplikation / Division**	
	8,6 + s = 13 13 – 8,6 = s 13 – s = 8,6		$3 \cdot x = 4{,}5$ 4,5 : 3 = x 4,5 : x = 3

Tab. 2: Das Streifenmodell für die Deutung der Elementarumformungen (siehe auch Malle, 1993)

Die aus einem Bild herausgelesenen Gleichungen gelten hierbei als äquivalent. Der Begriff der äquivalenten Gleichungen wird also durch die Beschreibung desselben Bildes (Beschreibungsgleichheit) mit Bedeutung gefüllt. Doch die eher statisch gedachte Beschreibungsgleichheit passt nur begrenzt zum dynamischen Umformen, wie Tondorf und Prediger (2022) für Termumformungen bereits problematisiert haben: Während eine Gleichung umgeformt wird, bleibt das Bild während des Vorgangs fest und ändert sich nicht. Vielmehr verschiebt sich der Fokus im Streifenmodell.

Das Streifenmodell für die Herleitung der Waageregeln

Das Streifenmodell lässt sich auch zur Herleitung der Waageregeln verwenden. Hierbei geht eine äquivalente Gleichung aus einer anderen durch Anwendung einer Äquivalenzumformung hervor. Diese ist dadurch charakterisiert, dass sie im Modell gleich lange Streifen in gleich lange Streifen überführt (siehe Tab. 3). So ergeben sich nach dem Hinzufügen oder Wegnehmen eines Streifens vom oberen und unteren Streifen weiterhin zwei gleich lange Streifen; für das Vervielfachen oder das Teilen des oberen und unteren Streifens in gleich viele Teile gilt dies entsprechend. Damit werden hier die Gleichungsumformungen nicht statisch, sondern dynamisch im Streifenmodell dargestellt.

Von Subtraktion zur Addition	**Von Addition zur Subtraktion**
	
$x - 5 = 7,2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 5 + 5 = 7,2 + 5$	$8,6 + s = 13 \quad \Leftrightarrow \quad 8,6 + s - 8,6 = 13 - 8,6$
Von Division zur Multiplikation	**Von Multiplikatin zur Division**
	
$z : 3 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad z : 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3$	$3 \cdot x = 4,5 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot x : 3 = 4,5 : 3$

Tab. 3: Herleitung der Waageregeln aus einem dynamischen Streifenmodell

Ausblick

Insgesamt zeigen verschiedene Studien (etwa Ng & Lee, 2009; Ho & Lowrie, 2014), dass es sich bei dem Streifenmodell um einen vielversprechenden Ansatz handelt, um Lernende im Umgang mit elementaren Gleichungen zu unterstützen. Erste Ergebnisse unserer Forschung weisen allerdings auch darauf hin, dass die Verwendung des Streifenmodells mit charakteristischen Problembereichen einhergeht (Roos & Kempen, 2022 in Druck). Zunächst zeigte sich, dass das Verfügen über die oben aufgeführten Grundvorstellungen zu den mathematischen Operationen eine wichtige Verstehensgrundlage für den Umgang mit dem Modell darstellt, die bei Lernenden teilweise erst noch explizit gemacht werden muss. Auch erscheint die Gefahr einer Übergeneralisierung von den Eigenschaften natürlicher Zahlen zu bestehen, da negative Zahlen keine Entsprechung in den Längendarstellungen des Modells haben. Und schließlich kann eine statische Sicht auf das Streifenmodell dazu führen, dass die Strategie des gezielten Auflösens nach einer gesuchten Variable nicht ausreichend entwickelt wird (ebd.). In unserer weiteren Forschungsarbeit wollen wir den Ansatz des Streifenmodells im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung weiter verfolgen und die Vor- und Nachteile dieses Modells für den Aufbau konzeptuellen Wissens in der elementaren Algebra herausarbeiten.

Bemerkung

Dieser Beitrag wurde im Rahmen der MuM-Forschungsgruppe durchgeführt (finanziell unterstützt durch BMBF-Förderung 01JD2001A). Wir danken Susanne Prediger für die Projektleitung und die Hinweise zu dieser Arbeit.

Literatur

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra. Ideas, insights, and acitivites*. Routledge.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25. http://www.jstor.org/stable/40247950

Ho, S. Y. & Lowrie, T. (2014). The model method: Students' performance and its effectiveness. *Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 87–100. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.06.002

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. In A. Gutierrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (S. 11–49). Sense Publisher. https://doi.org/10.1163/9789087901127_003

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg & Sohn.

Ng, S. F. & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 282–313. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0282

Roos, A.-K. & Kempen, L. (2022, in Druck). Using the bar model to ease the transition from transforming arithmetic-numerical to algebraic equations: theoretical considerations and possible obstacles. In J. Hodgen et al. (Hrsg.), *Proceedings of CERME 12*. ERME/HAL.

Tondorf, A. & Prediger, S. (2022). Connecting characterizations of equivalence of expressions: Design research in Grade 5 by bridging graphical and symbolic representations. *Educational Studies in Mathematics,111,* 399–422.

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341–359. http://www.jstor.org/stable/3483036