Sarah SCHLÜTER, Paderborn & Michael LIEBENDÖRFER, Paderborn

Bearbeitungsmuster von Studierenden im Umgang mit formalen Definitionen im Kontext konstanter Folgen

Im Übergang von der Schule zur Hochschule vollzieht sich insbesondere ein Übergang zur formalen Mathematik. Während in der Schulmathematik die Argumentation anhand von Beispielen, Visualisierungen und intuitivem Denken üblich ist, nutzt die Hochschulmathematik Beweise auf Grundlage von Axiomen und Definitionen (Liebendörfer, 2018).

Da Studierenden die Rolle von Definitionen bei mathematischen Argumentationen oftmals nicht bewusst ist, verwenden sie diese häufig nicht dazu (Edwards & Ward, 2008). Stattdessen argumentieren viele anhand von Beispielen oder intuitiven Überlegungen, selbst wenn Aufgaben ohne Definitionen nicht gelöst werden können (Alcock & Simpson, 2002; Holguin, 2016). Viele Studierende haben Schwierigkeiten mit den neuen Arbeitsweisen, fühlen sich vom neuen Diskurs ausgeschlossen und verlieren deutlich an Motivation (Liebendörfer, 2018). In diesem Beitrag berichten wir über eine explorative Studie mit dem Ziel, Schwierigkeiten und Strategien von Studierenden beim formalen Argumentieren zu identifizieren.

Theoretische Einordnung: Übergang zum Formalismus

Einen Ansatz zur Beschreibung der Schwierigkeiten beim formalen Argumentieren liefern Tall und Vinner (1981) mit der Unterscheidung zwischen dem „concept image“ und der „concept definition“. Demnach umfasst das concept image alle kognitiven Strukturen, die ein Individuum mit einem Begriff verbindet, darunter alle mentalen Bilder, Eigenschaften und Prozesse. Die concept definition hingegen bezeichnet die formale Definition. Sie muss beim Argumentieren in der formalen Mathematik dem concept image vorgezogen werden, insbesondere, wenn beide widersprüchlich erscheinen. Allerdings nutzen Studierende oft nur ihr concept image (Edwards & Ward, 2008). Während bisherige Arbeiten zur Förderung der Nutzung von Definitionen überwiegend auf angemessene Erweiterungen des concept images fokussieren, beschäftigen wir uns mit generellen Argumentationsweisen.

In diesem Kontext beschreibt Tall (2008) die Entwicklung des mathematischen Denkens mithilfe dreier Welten der Mathematik. Die „conceptual-embodied world” basiert auf der Wahrnehmung von Objekten und deren Eigenschaften, Mustern und Experimenten in der realen Welt. Durch die Verwendung von Symbolen, die sich aus Handlungen entwickeln, entsteht daraus die „proceptual-symbolic world“, wie zum Beispiel das Konzept einer Zahl, das durch Zählen entsteht. Die „axiomatic-formal world“ bezieht sich auf

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

formale Konzepte, die auf mengentheoretischen Definitionen und formalen Beweisen aufbauen. Der Übergang zu dieser Welt vollzieht sich im Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik. Studierende müssen lernen, dass Argumentationen, die in anderen Welten noch gültig waren, nun nicht mehr gültig sind. Tao (2007) betont, dass dabei die falsche Intuition verdrängt und die gute Intuition verstärkt werden soll. Erst wenn nach einigen Semestern das formale Arbeiten verinnerlicht wurde, kann die Intuition wieder vermehrt hinzugezogen werden. Aber auch dann endet eine gültige mathematische Argumentation immer mit einem Beweis.

Eine besondere Bedeutung der formalen Argumentation zeigt sich in Grenzfällen der Definition. Darunter verstehen wir Beispiele, die typische, aufgrund des concept images erwartete Eigenschaften eines Konzepts nicht erfüllen. Dabei ist die Intuition womöglich nicht sicher oder widerspricht der Definition. Beispielsweise stellt die konstante Folge einen Grenzfall bezüglich der Folgendefinition dar. Diese wird von Studierenden teilweise nicht als Folge akzeptiert, da ihr definierender Term kein „n" enthält (Roh, 2005). Um genauer zu verstehen, wie Studierende besonders in solchen Grenzfällen die formale Argumentation lernen, haben wir das Beispiel der konstanten Folge genauer untersucht. Dabei stellten wir folgende Forschungsfrage:

Welche Bearbeitungsprozesse lassen sich beim Umgang mit der konstanten Folge rekonstruieren?

Methode und Design der Studie

Um die Bearbeitungsprozesse bei der Arbeit mit solchen Beispielen genauer zu untersuchen, haben wir eine Studie mit 21 Teilnehmenden aus einem mathematischen Vorkurs durchgeführt. Einzeln oder paarweise wurden diese im Anschluss an die Bearbeitung einer digitalen Selbstlernumgebung zum Thema Folgen befragt. Die Interviews fanden via Zoom statt und wurden audio- und videographiert.

Zum Zeitpunkt der Studie waren die Teilnehmenden bereits mit grundlegenden mathematischen Konzepten und mathematischer Logik vertraut. In der digitalen Lernumgebung wurde zunächst eine Folge als Abbildung von den natürlichen in die reellen Zahlen definiert. Nach der Erkundung einiger Beispiele und Möglichkeiten der Darstellung von Folgen wurde die Frage gestellt, ob durch die Vorschrift $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (12)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge korrekt definiert ist. Erst anschließend wurde die Eigenschaft der Konstanz einer Folge definiert. Schließlich wurden die Definitionen (strenger) Monotonie (wachsend, fallend) von Folgen eingeführt und auf konkrete Folgen angewendet.

Im Interview wurde zunächst rückblickend gefragt, wie die oben genannte Frage zur konstanten Folge beantwortet wurde. Anschließend wurde gefragt, welches Monotonieverhalten die Folge besitzt. Die Interviews wurden transkribiert und mittels qualitativer Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2016) ausgewertet. Die Antworten zur ersten Aufgabe wurden zunächst deduktiv nach Schwierigkeiten und Strategien bei der Bearbeitung kodiert und diese jeweils induktiv nach auftretenden Subkategorien kodiert. Dabei konnte ein Dreischritt identifiziert werden. Um zu prüfen, ob dieser auf weitere Aufgaben übertragbar ist, diente er als Grundlage einer deduktiven Kodierung der Antworten zur zweiten Aufgabe.

Ergebnisse: Umgang mit der Definition der konstanten Folge

In der ersten Aufgabe zeichnete sich ein Dreischritt ab: Im ersten Schritt traten Spannungen bezüglich der Grenzfall-Eigenschaften auf. Diese entstanden zum einen durch die symbolische Darstellung der Folge, da der definierende Term kein „n" enthält. Zum anderen wurden Folgen prozesshaft charakterisiert. Da ein Folgenglied gegenüber dem vorherigen Folgenglied nicht variiert, wurde angenommen, dass keine Folge vorliegt.

Der zweite Schritt umfasste Strategien zur Überwindung dieser Spannungen, die dem kritischen Prüfen der Intuition dienten. Sie umfassten insbesondere Darstellungswechsel. Eine graphische oder tabellarische Darstellung der Folge stellte sich als hilfreich heraus, um zur Überzeugung zu gelangen, dass eine Folge vorliegt. Eine weitere intuitive Strategie war der Vergleich mit bereits bekannten Grenzfällen. Hier wurde die konstante Folge mit der konstanten Funktion verglichen, um darauf zu schließen, dass tatsächlich eine Folge vorliegt. Außerdem wurde die Summation ohne Laufindex, wie zum Beispiel $\sum_{k=1}^{5} 10$, genannt. Da auch hier das Fehlen des Indexes akzeptiert wird, wurde darauf geschlossen, dass dies bei der Folge ebenso sein muss.

In den meisten Fällen wurden diese Überlegungen durch den dritten Schritt der formalen Argumentation abgesichert. Hier wurde geprüft, ob die gegebene Vorschrift die Definition einer Folge erfüllt. Dabei wurde argumentiert, dass jeder natürlichen Zahl ein konkreter reeller Wert zugeordnet wird und es sich deshalb um eine korrekt definierte Folge handelt.

Ergebnisse: Prüfen des Monotonieverhaltens der konstanten Folge

Die zuvor identifizierten Schritte konnten auch in der zweiten Aufgabe wiedergefunden werden. So entstanden Unsicherheiten aufgrund eines intuitiven Gefühls, dass die Folge (nur) monoton wachsend oder sogar nicht monoton sei. Diese Vermutung wurde durch den Darstellungswechsel und die damit einhergehende intuitive Absicherung im zweiten Schritt gestärkt. Auch der dritte Schritt der formalen Argumentation konnte wiedergefunden werden, wenn zur Bearbeitung der Aufgabe die Definition genutzt wurde.

Wir haben allerdings festgestellt, dass die Bearbeitungen nicht linear verlaufen, sondern ein Kreislauf in beide Richtungen das Vorgehen der Studierenden angemessener abbildet. So wurde oftmals die Definition angewendet und zwar erkannt, dass die Folge sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend ist. Allerdings rief das gleichzeitige Zutreffen zweier Definitionen wiederum Unsicherheiten hervor. Das kritische Prüfen der Intuition mithilfe des Darstellungswechsels endete oft in der Argumentation, dass aufgrund eines „geraden Verlaufs“ des Graphen keine Monotonie vorliegt, ohne dies nochmal formal abzusichern.

Diskussion

Unsere Arbeit zeigt, dass formale Argumentation für sich genommen anfangs noch nicht völlig überzeugend ist. Sie unterstreicht das Lernziel, dass Studierende erkennen müssen, dass die formale Argumentation Vorrang gegenüber der intuitiven Argumentation hat. Die Studierenden haben demonstriert, dass bei diesem Lernschritt der Transfer von Erfahrungen mit anderen Grenzfällen (etwa konstante Funktionen) helfen kann. Im Vortrag werden mögliche Erklärungen für ihre Argumentationen sowie darauf basierende Unterstützungsmöglichkeiten diskutiert.

Literatur

Alcock, L. & Simpson, A. P. (2002). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 28– 34.

Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2008). The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses. *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics. MAA Notes, 73,* 223–232.

Holguin, A. V. (2016). Stages identified in university students' behavior using mathematical definitions. In M. B. Wood (Hrsg.), *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 534–541). UoA.

Kuckartz, U. (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (3. Aufl.). Beltz Juventa.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22507-0

Roh, K. H. (2005). *College Students' Intuitive Understanding of The Concept of Limit and Their Level of Reverse Thinking* [Doctoral dissertation].

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5–24. https://doi.org/10.1007/BF03217474

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tao, T. (2007). *There’s more to mathematics than rigour and proofs*. Wordpress. https://terrytao.wordpress.com/career-advice/theres-more-to-mathematics-than-rigour-and-proofs/