David SCHWARZKOPF, Bamberg

Schüler*innen der 8. Jahrgangsstufe beurteilen (elementare) Wahrscheinlichkeiten

In der Literatur wird auf unterschiedliche Besonderheiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegenüber anderen Gebieten der Mathematik hingewiesen (Batanero & Sanchez, 2005; Biehler & Engel, 2015; Krüger et al., 2015; Steinbring, 1985). Steinbring (1985) hebt beispielsweise die Vielfalt der verschiedenartigen Definitionen und gegensätzlichen Interpretationen des Begriffs Wahrscheinlichkeit hervor. Die unterschiedlichen Möglichkeiten, um Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln, werden nachfolgend als Wahrscheinlichkeitsaspekte bezeichnet. Zu den für den Mathematikunterricht zentralen Aspekten zählen der klassische, frequentistische und subjektivistische (Eichler & Vogel, 2014; Krüger et al., 2015).

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Aspekten liegt in der „Verortung" der Wahrscheinlichkeit (Batanero & Borovcnik, 2016, S. 96). Beim klassischen und frequentistischen Aspekt wird die Wahrscheinlichkeit dem beobachteten zufälligen Vorgang zugeordnet (Büchter & Henn, 2007). Damit handelt es sich um ein Merkmal, welches mithilfe mathematischer Mittel personenunabhängig (*objektiv*) quantifiziert werden kann. Die Mathematisierung setzt jedoch spezielle Modellannahmen voraus, wodurch die Anwendung auf bestimmte zufällige Vorgänge begrenzt ist. Im Gegensatz dazu verortet der subjektivistische Aspekt die Wahrscheinlichkeit in einer Person. Damit handelt es sich um ein personenabhängiges Urteil, welches in der Regel mithilfe qualitativer Wahrscheinlichkeitsangaben beschrieben wird. Die Möglichkeit, individuelle Annahmen heranzuziehen, macht den Aspekt auf alle zufälligen Vorgänge anwendbar. Die ermittelten *subjektiven* Wahrscheinlichkeiten besitzen damit jedoch keinen allgemeingültigen Charakter.

Unterrichtliche Herausforderungen

In der fachdidaktischen Literatur herrscht weitgehend Einigkeit, dass auch der Mathematikunterricht die Vielfalt der Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs abbilden muss (Batanero & Borovcnik, 2016; Krüger et al., 2015; Steinbring, 1985). Ein wesentliches Ziel dabei ist, „dass die Schülerinnen und Schüler von einer mehr informellen und qualitativen zur quantitativen, von formalen Kriterien geleiteten Sichtweise geführt werden" (Hasemann & Mirwald, 2007, S. 150). Die *objektive* (mathematische) Perspektive kann jedoch bereits auf einem elementaren Niveau mit dem *subjektiven* Empfinden einer Person in Konflikt geraten (Batanero & Sanchez, 2005; Biehler & Engel, 2015). Dies führt zu einer Art innerem Widerspruch, welcher einer *objektiven* Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten im Weg stehen kann. Es

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

bedarf daher einer langfristigen und kontinuierlichen Auseinandersetzung mit Zufall und Wahrscheinlichkeit im Mathematikunterricht (Büchter, 2014; Jäger & Schupp, 1983; Krüger et al., 2015). Die Analyse gültiger Lehrpläne zeigt jedoch, dass erste Erfahrungen im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten zwar mittlerweile überwiegend in der Grundschule verpflichtend vorgesehen sind, es aber dennoch mehrere Bundesländer gibt, „die in den Klassen 5 und 6 nicht hieran anknüpfen, sondern im Bereich der Stochastik ausschließlich Beschreibende Statistik vorsehen“ (Büchter, 2014, S. 5). Ein Beispiel ist das Bundesland Bayern. Hier finden sich verpflichtend Inhalte in den Jahrgangsstufen 1/2 und 3/4. Eine Anknüpfung findet jedoch in allen bayerischen Schularten der Sekundarstufe I erst in Jahrgangsstufe 8 statt. Es stellt sich somit die Frage, ob diese Diskontinuität Auswirkungen auf die bestenfalls bereits in der Grundschule erworbenen Kompetenzen hat. Insbesondere ist interessant zu untersuchen, ob eher *objektive* Kriterien bei der Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten (weiterhin) bewusst genutzt werden oder ob *subjektive* Einschätzungen, z.B. auch aufgrund vielfältiger Alltagserfahrungen, (wieder) dominieren. Folgende Forschungsfrage wird somit adressiert:

*Welche Kompetenzen zeigen die Schüler*innen zur Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten vor der unterrichtlichen Thematisierung in der Sekundarstufe und welche Kriterien nutzen sie?*

Methode und Design

Die Untersuchung wurde als Paper-Pencil-Test in zwei 8. Klassen einer Mittelschule durchgeführt. Im Gegensatz zu Grundschulkindern sind in Jahrgang 8 numerische Darstellungen in Bruch- und Prozentschreibweisen bereits erarbeitet und können bei der Itemkonstruktion genutzt werden. Wesentlicher Aspekt des Designs der Items ist, dass die Orientierung an nichtmathematischen, *subjektiven* Kriterien bei Bearbeitung der Aufgaben denkbar ist, aber zu einer unpassenden Einschätzung der Wahrscheinlichkeit führt. Exemplarisch werden hier zwei Items (Abb. 1) vorgestellt.

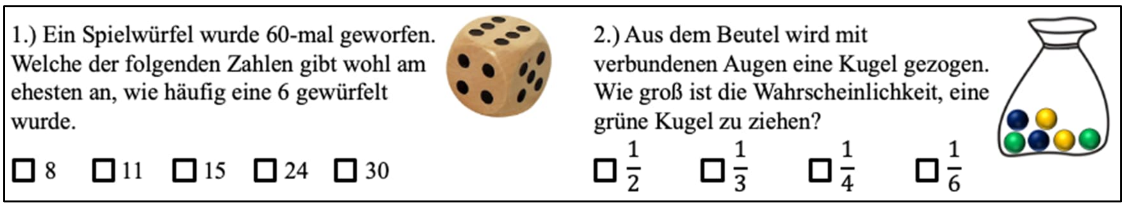

Abb. 20: Item1 (Spielwürfel) und Item2 (Urne)

Item 1 erwartet die Auswahl einer geeigneten absoluten Häufigkeit. Für eine angemessene Entscheidung muss die Vorkenntnis der Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Ergebnisse beim Wurf eines Spielwürfels genutzt werden. Eine Herausforderung besteht darin, dass keine der Auswahloptionen der mutmaßlich berechneten theoretischen Anzahl (10) exakt entspricht. Das subjektive Empfinden, die Augenzahl 6 hat die geringsten Chancen gewürfelt zu werden, kann beispielsweise zum Ankreuzen eines kleineren, von der theoretischen Anzahl weiter entfernten Wertes (8), führen.

Bei *Item 2* soll eine Wahrscheinlichkeit mithilfe eines Bruches angegeben werden. Die Antwortmöglichkeiten wurden dabei so gewählt, dass vor allem die Orientierung an Oberflächenmerkmalen der bildlichen Darstellung des Urnenmodells zu einem falschen Urteil führt. Empirische Ergebnisse zeigen, dass viele Lernenden bei der Beurteilung der Wahrscheinlichkeit eines ungleich verteilten Glücksrads fälschlicherweise ausschließlich die absolute Anzahl der Sektoren berücksichtigten (Rolfes & Fahse, 2019). Das Nutzen dieses Kriteriums würde hier analog zur Lösung 1/6 führen. Ähnlich kann das Ankreuzen der Lösung 1/2 die ausschließliche Beachtung der absoluten Anzahl der grünen Kugeln widerspiegeln. Denkbare Begründung für die Antwort 1/4 ist die Lage der Kugeln (Sill & Kurtzmann, 2019).

Ergebnisse und Diskussion

Die Ergebnisse bei *Item 1* zeigen, dass alle Antwortmöglichkeiten genutzt wurden. Die aus der mathematischen Perspektive eher unangemessenen Lösungen 24 (4%), 30 (8%) und ‚keine Antwort' (8%) machen in Summe ein Fünftel aus. Weniger als die Hälfte der Schüler*innen (46%) wählt die Lösung (11). Der kleinere Wert (8) spielt, entgegen den beschriebenen Erwartungen, mit 13% vergleichsweise nur eine kleinere Rolle. Mehr Schüler*innen (21%) haben sich für einen noch weiter entfernten, aber größeren Wert (15) entschieden. Eine subjektive Begründung könnte auch im Angebot bzw. der Anordnung der Antwortmöglichkeiten liegen, die in der Literatur als Tendenz zur Mitte (z.B. Bogner & Landrock, 2015) beschrieben wird.

Das Verwenden von subjektiven Kriterien zeigt sich ebenso bei *Item 2*. Weniger als die Hälfte der Schüler*innen (46%) wählt die Lösung (1/3). Dabei muss beachtet werden, dass auch hier theoretisch eine Wahl nach subjektiven Kriterien denkbar ist, falls als Begründung die absolute Anzahl der unterschiedlichen Farben herangezogen wird. Die Beachtung der Anzahl aller Kugeln könnte eine Erklärung sein, warum die Lösung 1/6 mit 30% deutlich hervorsticht. Auch die weiteren Antwortmöglichkeiten 1/2 und 1/4 machen mit jeweils 12% summiert knapp ein Viertel aus. Die mutmaßlichen Gründe für dieses Ankreuzverhalten wurden oben geschildert.

Fazit

Die Ergebnisse deuten an, dass ein großer Teil der untersuchten Schüler*innen der 8. Jahrgangsstufe eher subjektive Kriterien zur Beurteilung von (elementaren) Wahrscheinlichkeiten nutzen, obwohl sie in der Grundschule bereits verpflichtend Unterricht zu diesem Themenbereich hatten und die gewählten Zufallsgeneratoren auch dort bereits gebräuchlich sind. Die fehlende Kontinuität scheint sich zuungunsten objektiver Kriterien auszuwirken. Aufgrund der geschlossenen Items können jedoch keine genaueren Aussagen über die Gedanken der Lernenden gemacht werden. Zudem lässt der kleine Umfang der Stichprobe keine allgemeinen Aussagen zu. Für weitere Untersuchungen werden die Antwortmöglichkeiten aktuell überarbeitet und auch offene Items aufgegriffen, um eindeutiger das Nutzen eher *objektiver* bzw. *subjektiver* Kriterien identifizieren zu können.

Literatur

Batanero, C. & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Sense Publishers.

Batanero, C. & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability. In G. A. Jones (Hrsg.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (S. 241–266). Springer.

Biehler, R. & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Springer.

Bogner, K. & Landrock, U. (2015). Antworttendenzen. *GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften (GESIS Survey Guidelines)*. https://doi.org/10.15465/gesis-sg_016

Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip. *Mathematik lehren*, *182*, 2–9.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik* (2. Aufl.). Springer.

Eichler, A. & Vogel, M. (2014). Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Hrsg.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (S. 75–99). Springer.

Hasemann, K. & Mirwald, E. (2007). Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Grenzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule* (S. 141–161). Cornelsen.

Jäger, J. & Schupp, H. (1983). *Curriculum Stochastik in der Hauptschule*. Schöningh.

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe 1*. Springer.

Rolfes, T. & Fahse, C. (2019). Zufallsphänomene erfassen. *Mathematik lehren*, *213*, 2–7.

Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Spektrum.

Steinbring, H. (1985). Mathematische Begriffe in didaktischen Situationen: Das Beispiel der Wahrscheinlichkeit. *Journal für Mathematikdidaktik*, *6*(2), 85–118.