

Alexandra TONDORF, Dortmund

Strukturen in präalgebraischen Termen verstehen – die Rolle der Gestik für die Darstellungsvernetzung

Die Bedeutung von Mustern und Strukturen für das präalgebraische Lernen wird in der fachdidaktischen Literatur immer wieder betont. Während das Verallgemeinern von Mustern als präalgebraische Tätigkeit international und national breit beforscht ist, besteht eine Lücke in der Beforschung präalgebraischer Lernumgebungen mit dem Fokus auf Strukturen (Kieran, 2018). In unserer Entwicklungsforschungsstudie wird daher eine Lernumgebung für die Klasse 5/6 entwickelt und erforscht, die das Beschreiben von Strukturen als Terme und das Verstehen von durch Terme ausgedrückte Strukturen in den Fokus nimmt (Tondorf & Prediger, 2022). Das Prinzip der Darstellungsvernetzung (Wessel, 2015) ist ein leitendes Designprinzip. Im Beitrag wird ein Einblick darüber gegeben, wie diese sich in den Kleingruppenförderungen realisiert und welche Rolle Gestik neben Verbalprache dabei einnimmt.

Die Rolle von Sprache und Gestik für Darstellungsvernetzung

Für die Förderung konzeptuellen Verständnisses beim Mathematiklernen ist die Vernetzung verschiedener Darstellungen ein bewährtes Designprinzip, in dem Sprache in ihrer Doppelrolle als eigene Darstellungsebene und Medium des Vernetzungsprozesses eine besondere Bedeutung einnimmt (Wessel, 2015). Sfard (2009) plädiert dafür, Sprache nicht auf das Geschriebene oder Gesprochene zu reduzieren, sondern komplette „Kommunikationssysteme“, also auch Gestik, in der Debatte um Sprache mitzudenken. Die Rolle der Gestik für die Entwicklung mathematischer Konzepte ist für verschiedene Inhalte in unterschiedlichen Zusammenhängen beforscht. Am Beispiel Funktionsgraphen zeigt Radford (2009), wie (Zeige-)Gestik in Kombination mit verbaler Sprache und ikonischen Darstellungen einen Beitrag zur Darstellungsvernetzung leisten kann. Er beschreibt, wie Lernende bei der Interpretation eines Graphen auf verschiedene Stellen desselben zeigen, während sie verbalsprachlich die inhaltliche Bedeutung beschreiben (Radford, 2009). Auf diese Weise nutzen sie Sprache und Zeigegestik, um die Darstellungen zu verknüpfen und den Graphen schrittweise sinnstiftend zu deuten.

Dass (Zeige-)Gestik auch für das präalgebraische Lernen genutzt werden kann, zeigen Radford et al. (2007). Sie beschreiben wie Lernende beim Fortführen und Verallgemeinern von Punktemustern auf konkrete Punktebilder zeigen, während sie allgemeine Zusammenhänge beschreiben (Radford et al., 2007). Die Lernenden unterstützen somit ihre verbalsprachliche Erläuterung, indem sie mit Hilfe ihrer Zeigegestik Referenz zu den Strukturen der ikonischen Darstellung schaffen.

Ausgehend von diesen Ergebnissen zur Bedeutung der Gestik für die Konzeptentwicklung und vor dem Hintergrund der besonderen Rolle der Sprache für die Darstellungsvernetzung untersucht diese Entwicklungsforschungsstudie daher die Frage, inwiefern Verbalsprache und Gestik als sich ergänzende Komponenten eines Systems bei der Darstellungsvernetzung von Termen und strukturierten Figuren unterstützen können.

Analyse einer Darstellungsvernetzung

Am Beispiel der Fünftklässlerinnen Linda und Lea wird deutlich, dass es den Lernenden bei einfachen multiplikativen Termen gut gelingt, symbolische und geometrische Darstellung zu vernetzen und diese Vernetzung schriftsprachlich zu verbalisieren. Linda (Abb. 1) nutzt dazu die bedeutungsbezogene Gruppensprache der Multiplikation „10 12er“ und konkretisiert schriftlich die Struktur, die sie auch einzeichnet: „immer 12 Kästchen“.

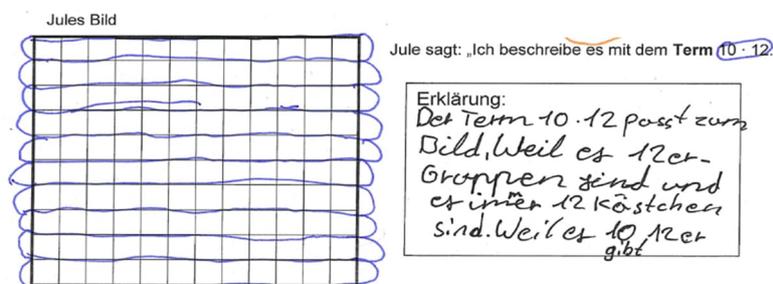


Abb. 1: Lindas Strukturierung in Bild und Sprache

Auf Ebene der Syntax wird Sprache außerdem genutzt, um die Begründung des Zusammenhangs zu artikulieren: „Der Term [...] passt [...], weil [...]“.

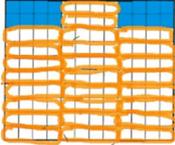
Eine solche Darstellungsvernetzung über die Sprache gestaltet sich bei komplexeren Termen schwieriger. In einer fortführenden Aufgabe versuchen die Lernenden, den Term $8 \times 3 \times 4 + 2 \times 4$ in ein vorstrukturiertes Bild hineinzuzeichnen. Indem sie in einem ersten Schritt die in der Aufgabe angebotene bedeutungsbezogene Beschreibung der Struktur rephrasieren (# 29-35), während sie gleichzeitig auf die jeweiligen geometrischen Strukturen zeigen, erschließen sie sich die geometrische Struktur, die der schriftsprachlichen Beschreibung zugrunde liegt. Durch die Nutzung der Gestik entlasten sie sich dabei sprachlich. Indem sie Zeigegestik nutzen statt verbalsprachlich auf ihre Bezugspunkte zu verweisen, gelingt es ihnen, die grammatikalische Komplexität zu reduzieren und dabei trotzdem klare Bezüge zu setzen.

Auf Nachfragen der Förderlehrerin (FL), bezieht Linda in einem zweiten Schritt auch das Symbolische als dritte Darstellungsebene mit ein. Während sie ein weiteres Mal die vorgegebene sprachliche Strukturbeschreibung rephrasiert, nutzt sie erneut die Zeigegestik, um sowohl im symbolischen Term als auch in der geometrischen Struktur Referenzen zu schaffen. Mit

zwei Fingern zeigt sie gleichzeitig auf die angesprochenen Teilstrukturen im Term und auf ihre jeweiligen Entsprechungen im Bild (#37).

$$(8 \cdot 3 \cdot 4) + (2 \cdot 4)$$

sind acht Reihen, jede Reihe mit drei 4ern
und dazu noch zwei 4er



- 29 Linda Aber dann sagt sie noch jede Reihe hat mit drei 4ern, wie hier [zeigt auf das Bild].
- 30 FL Mhm.
- 31 Linda Und dann noch zwei 4er hier [tippt zwischen die blauen Teilflächen] #
- 32 Lea #also eins zwei drei hier [zählt 4er in der unteren Zeile des Bildes]
- 33 FL Mhm.
- 34 Linda Und dann nach#
- 35 Lea #Und die 4er sind dann noch die 4er Gruppen
- 36 FL Mhm genau und wie schreibt sie das in dem Term auf?
- 37 Linda Sie schreibt es ähm acht also das ist- es gibt acht [streicht vertikal über die 8 Zeilen im Bild und zeigt gleichzeitig auf 8×3 im Term] 3er in einer Reihe und da sind jeweils immer 4 drin [streicht über eine Zeile mit drei 4ern im Bild und zeigt dabei auf $\cdot 4$ im Term].

Nachdem die Schülerinnen in einem ersten Schritt also die sprachliche Struktur mit der geometrischen vernetzen (#29-35), nutzt Linda diese Verknüpfung hier, um die geometrische Struktur des Bildes mit der Termstruktur zu vernetzen (#37). Dabei verwendet sie Zeigegestik, um ihre Bezüge zu verdeutlichen und gleichzeitig auf die symbolische und die geometrische Ebene zu verweisen. Durch die Nutzung der bedeutungsbezogenen Sprache zur Strukturbeschreibung gelingt es ihr sprachlich, dabei gleichzeitig sowohl die symbolische Struktur im Term als auch die geometrische Struktur im Bild zu beschreiben. Somit fungiert die bedeutungsbezogene Sprache hier als Vernetzungsebene zwischen Bild und Term.

Obwohl Linda auf Ebene der Syntax durchaus in der Lage ist, Vernetzungen von Darstellungen zu begründen (Abb. 1), tut sie dies an dieser Stelle nicht. Die bedeutungsbezogene Sprache zur Beschreibung der Struktur ist für die doppelte Bündelung $(8 \cdot 3 \cdot 4)$ komplexer zu verbalisieren als bei einfachen multiplikativen Termen und stellt Lernende somit vor größere sprachliche Herausforderungen. Indem Linda jedoch die überbrückende Funktion der bedeutungsbezogenen Sprache in Kombination mit ihrer Zeigegestik nutzt, gelingt es ihr, sich auf Ebene der Syntax sprachlich zu entlasten und sich auf den inhaltlichen Zusammenhang der doppelten Bündelung zu beschränken.

Fazit

Zusammenfassend deutet sich in dem vorgestellten Beispiel an, dass auch für die Erfassung von Termen und Termstrukturen bedeutungsbezogene Sprache ein zentraler Aspekt der Darstellungsvernetzung ist. Zeigegestik, als Teil des Kommunikationssystems, scheint dabei insbesondere für komplexere Terme bei der Darstellungsvernetzung unterstützen zu können. Das vorgestellte Beispiel zeigt, wie mit Hilfe von Gestik gleichzeitig auf Teilstrukturen innerhalb der geometrischen und symbolischen Darstellung verwiesen werden kann und wie diese mit Hilfe der überbrückenden bedeutungsbezogenen Sprache vernetzt werden können. Es gliedert sich somit in vorherige Beobachtungen zum Nutzen von Sprache und Gestik zur Konzeptentwicklung ein (Radford et al., 2007; Radford, 2009), zeigt aber darüber hinaus die Relevanz der bedeutungsbezogenen Denksprache. Im weiteren Verlauf des Projektes soll dieses Zusammenspiel genauer untersucht und auch die Frage beantwortet werden, wie sich diese Beobachtung auch für andere komplexere inhaltliche Zusammenhänge wie das Umformen von Termen realisiert.

Dank. Das Projekt MuM-Präalgebra wird unter Projektleitung von Susanne Prediger durchgeführt und wurde finanziell unterstützt durch die Deutsche Telekom Stiftung.

Literatur

- Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* (S. 79–105). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4
- Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 111–126. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3>
- Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 507–530. <http://dx.doi.org/10.2307/30034963>
- Sfard, A. (2009). What's all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 191–200. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9161-1>
- Tondorf, A. & Prediger, S. (2022, online first). Connecting characterizations of equivalence of expressions: Design research in Grade 5 by bridging graphical and symbolic representations. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10158-0>
- Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding - Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-07063-2>