

Karyna UMGELTER, Hildesheim & Sebastian GEISLER, Hildesheim

Qualität von Mathematikvorlesungen – Präsentation von Sätzen und Beweisen in Analysisvorlesungen

Vorlesungen in höherer Mathematik sind für viele Studierende herausfordernd. Deshalb brechen viele von ihnen ihr Studium ab oder wechseln zu einem anderen Fach bereits im ersten Studienjahr (Geisler, 2020). Viele Wissenschaftler zweifeln an der Effektivität von Vorlesungen (z.B. Fritze & Nordkvelle, 2003). Es gibt jedoch wenig empirische Forschung, die diese Zweifel unterstützen kann (Viirman, 2021). In diesem Beitrag werden die Ergebnisse einer Hospitationsstudie bezüglich der Qualität der Präsentation von Sätzen und Beweisen in Analysisvorlesungen vorgestellt.

Theoretische Perspektive

Es gibt keine weit verbreitete Definition für Qualität von Mathematikveranstaltungen oder Hochschullehre allgemein. Aus diesem Grund überträgt Kiendl-Wendner (2016) eine Definition im Kontext von Unternehmen auf die Hochschule: „Hoch ausgeprägte Unternehmensqualität bedeutet, dass die jeweilige Organisation die an sie gestellten Anforderungen sehr gut erfüllt und dadurch in der Lage ist, dauerhaft herausragende Leistungen zu erbringen und Ergebnisse zu erzielen“ (Quality Austria, 2013, zitiert nach Kiendl-Wendner, 2016, S. 245). Außerdem differenziert Kiendl-Wendner (2016) die Qualität nach Formen – Makroebene (gesamte Universität) und Mikroebene (einzelne Veranstaltung), sowie Dimensionen – Prozessqualität (klar definierte Prozesse), Ergebnisqualität (Erreichen der Ziele) und Strukturqualität (Ressourcenausstattung). In dieser Studie wird die Prozessqualität von Analysisvorlesungen auf der Mikroebene untersucht.

Im Folgenden werden zwei Modelle zur Qualität von Mathematikvorlesungen vorgestellt. Das erste Modell stammt von Rach et al. (2016) und besteht im Wesentlichen aus zwei Schwerpunkten: Präsentation von Definitionen, Sätzen und Beweisen sowie allgemeinen Kriterien. Das zweite Modell stammt von Bergsten (2007) und besteht aus drei Kategorien: mathematical exposition, general criteria und teacher immediacy. Damit eine hohe Qualität der Mathematikvorlesungen gewährleistet werden kann, müssen alle drei Kategorien erfüllt sein (Bergsten, 2007). Aus beiden Modellen wurde für diese Studie eine Synthese gebildet, um die Qualität von Mathematikvorlesungen zu beschreiben. Nach diesem Modell setzt sich die Qualität von Mathematikvorlesungen aus drei Komponenten zusammen: mathematikspezifische Komponente (z. B. Präsentation von Sätzen und Beweisen), allgemeine Komponente (z. B. kognitive Aktivierung) und Auftreten der Lehrperson (z. B. non-verbales Verhalten).

Fukawa-Connelly (2014) analysierte in seiner Studie die Präsentation von Beweisen in Vorlesungen nach dem Modell von Toulmin. Laut Fukawa-Connelly (2014), eignet sich das Modell von Toulmin für die Beschreibung mancher Aspekte des Geschriebenen und der Dialoge der Dozierenden, jedoch können damit die Aspekte des Modellierens von Beweisen nicht ausreichend erklärt werden. Deswegen lehnt sich diese Studie in Bezug auf die Beschreibung der Präsentation von Sätzen und Beweisen an das Modell von Boero (1999) an. Nach Boero (1999), setzt sich ein Beweisprozess aus sechs Phasen zusammen: 1. Entwicklung einer Vermutung; 2. Formulieren der Vermutung; 3. Exploration der Vermutung; 4. Auswahl der Argumente; 5. Organisation ausgewählter Argumente; 6. Annäherung an einen formalen Beweis. Rach et al. (2016) haben diese Phasen des Beweisprozesses in ein Beobachtungsinstrument integriert, welches im nächsten Abschnitt näher vorgestellt wird.

Forschungsfrage und Methodik

Da es kaum empirische Forschung bezüglich der Charakteristika von Mathematikvorlesungen gibt (vgl. Viirman, 2021), wird es in diesem Beitrag einen ersten empirischen Einblick zur systematischen Beobachtung von Mathematikvorlesungen zu geben. Unsere Forschungsfrage lautet:

Inwiefern ist es möglich, Unterschiede bezüglich der Präsentation von Sätzen und Beweisen in Mathematikvorlesungen bei zwei verschiedenen Dozierenden zu erkennen und welche Unterschiede können beobachtet werden?

Eine Sichtung von Modulhandbüchern mehrerer Universitäten in Deutschland hat ergeben, dass sich die Themen zu Analysis I an verschiedenen Universitäten besonders stark ähneln. Daher fiel die Entscheidung, Vorlesungen in Analysis I zum Thema Folgen und Reihen zu hospitieren. Um die Beobachtungen systematisieren und miteinander vergleichen zu können, wurde ein strukturiertes Beobachtungsprotokoll von Rach et al. (2016) benutzt. Es basiert auf dem theoretischen Ansatz zu den Phasen der Präsentation von Sätzen und Beweisen nach Boero (1999). Das Beobachtungsprotokoll wurde leicht angepasst.

Das standardisierte Beobachtungsprotokoll umfasst fünf Kategorien für die Beschreibung der Präsentation von Sätzen und Beweisen: (1) *Entwicklung einer Behauptung*, (2) *Formulierung einer Behauptung*, (3) *Exploration einer Behauptung*, (4) *Organisation der Argumente* und (5) *Bedeutung und Überblick*. Jede Kategorie kann in vier Niveaus bewertet werden: 1 – gut behandelt, 2 – behandelt, 3 – schlecht behandelt, 4 – nicht behandelt.

Für diesen Beitrag wurden zwei Vorlesungskurse zu Analysis I bei zwei verschiedenen Dozenten (hier: Dozent A und Dozent B) aus einer großen deutschen Universität hospitiert. Die Vorlesungen sind für reine Mathematikstudierende sowie für Studierende im gymnasialen Lehramt konzipiert. Um sicher zu gehen, dass das verwendete Messinstrument reliabel ist, hat eine weitere Wissenschaftlerin jeweils eine Vorlesung vom Dozenten A und Dozenten B hospitiert und kodiert. Die Korrelation zwischen den Kodierungen nach Pearson $\rho = 0.68$ weist auf eine mittlere aber stabile Korrelation und damit ausreichende Reliabilität zwischen beiden Kodierungen hin.

Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Kodierung der Präsentation von Sätzen und Beweisen, die bei beiden Dozenten vorkamen, vorgestellt.

Die Mittelwerte zeigen, dass Dozent A in allen fünf Kategorien bessere Werte erreicht hat als Dozent B. In den Kategorien *Formulierung einer Behauptung* und *Organisation der Argumente* erreicht Dozent A die Stufe gut behandelt ($M_{A(2)} = M_{A(4)} = 1, SD_{A(2)} = SD_{A(4)} = 0$), während die Bewertungen für Dozenten B zwischen gut behandelt und behandelt liegen ($M_{B(2)} = 1.46, SD_{B(2)} = 0.84; M_{B(4)} = 1.69, SD_{B(4)} = 1.26$). Das bedeutet, dass beide Dozenten großen Wert auf korrekte Formulierungen der Behauptungen und die Organisation der Argumente für deren Beweise legen. Außerdem erreicht die *Exploration einer Behauptung* bei Dozenten A einen besseren Mittelwert; er liegt zwischen gut behandelt und behandelt ($M_{A(3)} = 1.63, SD_{A(3)} = 0.48$). Anders sieht es bei Dozenten B in dieser Kategorie aus, da der Mittelwert zwischen behandelt und schlecht behandelt liegt ($M_{B(3)} = 2.76, SD_{B(3)} = 0.69$). Beide Dozenten erreichen auffällig schwächere Mittelwerte in den Kategorien *Entwicklung einer Behauptung* und *Bedeutung und Überblick* im Vergleich zu den anderen drei Kategorien: bei Dozenten A liegen die Werte zwischen behandelt und schlecht behandelt ($M_{A(1)} = 2.45, SD_{A(1)} = 1.07; M_{A(5)} = 2.54, SD_{A(5)} = 1.30$), bei Dozenten B – zwischen schlecht behandelt und nicht behandelt ($M_{B(1)} = 3.69, SD_{B(1)} = 0.60; M_{B(5)} = 3.15, SD_{B(5)} = 1.29$).

Zusammenfassung und Diskussion

Dozent A erreicht insgesamt bessere Mittelwerte in allen Kategorien für die Präsentation von Sätzen und Beweisen in den Vorlesungen als Dozent B. Die Mittelwerte für die Kategorien *Formulierung einer Behauptung* und *Organisation der Argumente* liegen bei beiden Dozenten zwischen gut behandelt und behandelt. Am deutlichsten fällt der Unterschied bei beiden Dozenten in

den Kategorien *Exploration einer Behauptung*, *Entwicklung einer Behauptung* und *Bedeutung und Überblick* aus. Auch die Mittelwerte dieser Kategorien fallen im Vergleich zu anderen Kategorien deutlich schwächer aus. Es lässt sich annehmen, dass die Dozenten unterschiedliche Bedeutung den Phasen des Beweisprozesses zuschreiben. Außerdem haben die Studierenden die Ideen hinter den Beweisen bei beiden Dozenten vermutlich unterschiedlich tief verstanden.

Eine Limitation unserer Studie ist die geringe Stichprobe. Aus diesem Grund können die Ergebnisse nicht generalisiert werden. Außerdem weist das Messinstrument nur eine mittlere Korrelation auf. Deshalb muss es für zukünftige Hospitationen entsprechend angepasst werden.

Literatur

- Bergsten, C. (2007). Investigating Quality of Undergraduate Mathematics Lectures. *Mathematics Education Research Journal*, 19(3), 48–72.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7(8).
- Fritze, Y. & Nordkvelle, Y.T. (2003). Comparing lectures: effects of the technological context of a studio. *Education and Information Technologies*, 8(4), 327–343.
- Fukawa-Connelly, T. (2014). Using Toulmin analysis to analyse an instructor's proof presentation in abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(1), 75–88.
- Geisler, S. (2020). Early Dropout from University Mathematics: The Role of Students' Attitudes towards Mathematics. In M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Hrsg.), *Proceedings of the 44th conference of the international group for the psychology of mathematics education: Interim Vol.* (S. 189–198). PME.
- Kiendl-Wendner, D. (2016). Die Qualität der Hochschullehre und deren Messung. In Steirische Hochschulkonferenz (Hrsg.), *Qualität in Studium und Lehre. Kompetenz- und Wissensmanagement im steirischen Hochschulraum* (S. 243–262). Springer Fachmedien.
- Quality Austria. (2013). *Unternehmensqualität. Die Position der Quality Austria*. http://www.qualityaustria.com/fileadmin/_migrated/content_uploads/Positionspapier_UQ_11_2013.
- Rach, S., Siebert, U. & Heinze, A. (2016). Operationalisierung und empirische Erprobung von Qualitätskriterien für mathematische Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 601–618). Springer Spektrum.
- Viirman, O. (2021). University Mathematics Lecturing as Modelling Mathematical Discourse. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7(4), 466–489.