Lukas WACHTER, Saarbrücken

Action! – Handlungsbeweise im Mathematikunterricht der Primarstufe

Die Disziplin des mathematischen Beweise(n)s hat in der Geschichte der Mathematik eine lange Tradition. Euklids *Elemente,* induktive Beweise und Vorläufer von Algorithmen aus dem Alten Ägypten und Babylon (Scriba & Schreiber, 2005) oder auch intensive Auseinandersetzungen mit dem Prinzip der vollständigen Induktion am Übergang des Spätmittelalters zur frühen Neuzeit (Reichel, 1980) sind nur einige Beispiele. Die moderne axiomatische Mathematik führt diese Tradition in Form deduktiver Beweise fort und postuliert so das Ideal des mathematischen Beweises: aus Axiomen (in der Praxis auch aus Bewiesenem) wird mittels gültiger Schlussregeln das zu Beweisende hergeleitet (Biehler & Kempen, 2016). Der formale Beweis kann dann z. B. in Form eines direkten oder eines Beweises durch Widerspruch konkretisiert werden. Diese höchste Stufe des Beweisens unterscheidet sich vom induktiven „Beweis“ (Schluss aus gültigen Beispielen), dem reduktiven „Beweis“ (Schluss aus gültigen Folgerungen) oder der Akzeptanz einer Aussage aufgrund der Autorität der Quelle (Fischer & Malle, 2004).

Beweise(n) als didaktisches Konstrukt

Es ist keine Neuheit, dass das Beweisen im Schulunterricht, insbesondere in der Primarstufe, ein Schattendasein fristet (Stylianides, 2016). „Die Begründung dafür ist offensichtlich: Das konkret-operationale Kind verfügt nicht über hypothetisches Begründen, nicht über Deduktion in Form von Worten und Zeichen.“ (Semadeni, 1984, S. 32, übersetzt durch den Autor). Dabei gibt es seit vielen Jahren, national wie international, immer wieder Bemühungen, diese Lücke sowohl durch konzeptuelle als auch normative Beiträge (KMK, 2012) zu schließen (Stylianides, 2016). Für eine detaillierte Analyse sowie einen systematischen Vergleich verschiedener Autor*innen und deren Wirken sei hier auf die Arbeit von Biehler und Kempen (2016) verwiesen.

Allen gemein ist der Vorschlag eines Weges weg von formaler Mathematiksprache hin zu einer entschärften, anschaulichen Form des Beweisens. Dabei nimmt meist der anschauliche Einzelfall der Situation, in dem das zu Beweisende nachgewiesen wird, eine repräsentative Rolle für die gesamte Problemklasse ein. Eine wichtige Anforderung an eine – im Sinne von Blum und Kirsch – „intellektuell ehrliche“ (Blum & Kirsch, 1979, S. 7), nicht-formale Beweisführung ist außerdem deren *Potenzial* zur direkten Formalisierung.

Als konkrete Realisierung dessen stellt Semadeni (1984) sein Konzept des *premathematical proof*, später aufgrund unerwünschter Konnotation auch

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

action proof genannt, vor. Der prämathematische Beweis ist explizit auf den Unterricht der Primarstufe sowie die Ausbildung von Lehrkräften ausgelegt und wird wie folgt beschrieben:

> "One may think of an action proof as an idealized, simplified version of a recommended way in which children can convince themselves of the validity of a statement. […] an action proof is the result of internalizing an action rather than a logical inference from given premises. […] The basic idea of an action proof is that we abstract not only single concepts involved in the statement but also certain proofs." (Semadeni, 1984, S. 32)

Semadeni beschreibt zur Durchführung des *action proofs* vier Schritte. Zuerst wird eine konkrete und real manipulierbare Situation des Sachverhalts betrachtet, die im Anschluss durch Variation der Konstanten ausgeweitet wird. Zur Begründung der Korrektheit soll jeweils die gleiche – enaktive – Methode genutzt werden. Branford (1913), dessen vier Stufen des Beweisens Grundlage dieser und vieler weiterer didaktischer Beweisformen bildet, beschreibt jene Erkenntnisse als „Postulate der sinnlichen Wahrnehmung“ (Branford, 1913, S. 103). Erkennt der Lernende durch weiteres, mentales Generieren von Beispielen, wie so beliebig viele weitere Situationen entstehen, kann abschließend eine Klasse von Fällen identifiziert werden, in denen die gefundene Methode trägt. Essentiell ist dabei, dass die Aktivitäten semantisch korrekte Konkretisierungen eines potentiell formalisierbaren Beweises und damit in allen im letzten Schritt gefundenen Fällen gültig sind.

3D-Druck im Setting von Beweisen über figurierte Zahlen

Der Prozess des 3D-Drucks erfreut sich u. A. im Rahmen der Mathematik-Didaktik immer größer werdendem Interesse, ist jedoch immer noch ein eher spärlich eingesetztes Medium in der Schule (Dilling, 2022). An dem Satz „Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl.“ soll gezeigt werden, welchen Wert das Medium beim Beweisen im Sinne der *action proofs* in der Primarstufe (Klassenstufe 3/4) offenbaren kann.

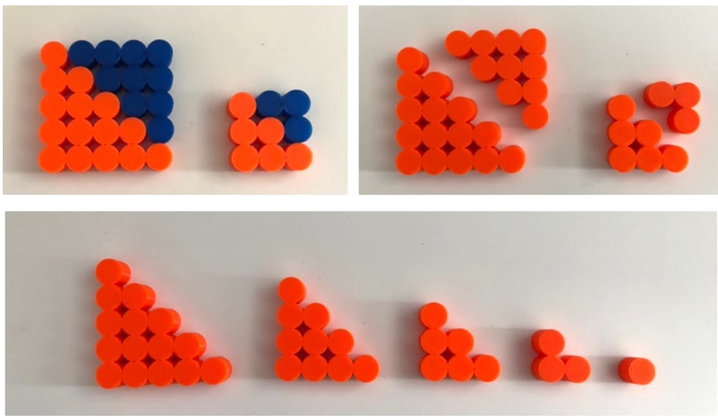

Abb. 1: 3D- Modelle figurierter Zahlen

Als enaktives Material werden Visualisierungen von Dreieckszahlen mittels 3D-Software (z. B. GeoGebra) designt und im Anschluss 3D-gedruckt (vgl. Abb. 1). Bereits hier können Lernende selbst aktiv werden, im Designprozess mitwirken, damit wertvolle Vorerfahrungen zum Aufbau von Dreieckszahlen sammeln und so eine „empirische Theorie[n] über die 3D-gedruckten Objekte“ (Dilling, 2022, S. 274) entwickeln. Weiter wird eine Vielzahl allgemeiner mathematischer Kompetenzen gefördert (Dilling, 2022).

Der *action proof* besteht aus vier Schritten. Zunächst erkunden die Lernenden das Material mit der Aufgabe ein Paar von Dreieckszahlen (z. B. 10 und 15) zu finden, die aneinandergelegt ein Quadrat bilden. Eine mögliche tragfähige Begründung, dass tatsächlich ein Quadrat entsteht, wäre, dass in 5 Zeilen je 5 Steine zu finden sind; denn es addieren sich zwei komplementäre Treppenfiguren mit Höhe 4 je Zeile zu 5 und es kommt eine Zeile mit Länge 5 dazu (vgl. Abb. 1, oben links). Analog können im zweiten Schritt weitere Beispiele durch Austausch der Konstanten gefunden werden. Der Übergang zur Internalisierung der Operation des Anlegens kann auf natürliche Art durch große, sperrige Zahlen erfolgen oder es bietet sich die Möglichkeit, bewusst nur so viele Figuren zum Explorieren anzubieten, sodass eine Figur ohne Partner bleibt (Impuls: „Wie sieht die Figur aus, die man anlegen muss, um ein Quadrat zu erhalten?“). Die Verallgemeinerung erfordert dann zuletzt die Einsicht, dass die gesuchte Klasse zur Problemlösung aus Paaren aufeinanderfolgender Dreieckszahlen besteht.

Der 3D-Druck ermöglicht in diesem Kontext neben den o. g. Möglichkeiten weiterhin, innerhalb kurzer Zeit individuell gestaltetes Material zu produzieren. Die Aufgabe kann z. B. dahingehend variiert werden, dass zweifarbige Paare gefunden werden sollen. Damit wird das Problem eingegrenzt bzw. eine Art Heuristik bereitgestellt. Die Figuren können weiterhin leicht zu beliebigen anderen figurierten Zahlen für ähnliche Sätze angepasst werden.

Fazit & Ausblick

Das oben beschriebene Vorgehen im Unterricht beschreibt nicht das, was klassischerweise unter der Beweisführung für einen Satz verstanden wird. Statt einen vorgegebenen Satz zu beweisen, ist es zunächst Aufgabe der Lernenden, den Satz als Vermutung aufzustellen und im Anschluss zu begründen. Krumsdorf (2015) stellt den durch überraschende Entdeckungen motivierenden Charakter und aufgrund dessen die inhärente Grundlage zum Begründen des Sachverhalts in solchen Aufgaben heraus. Weiter sind diese Aufgabenarten selten und könnten Lernenden Probleme bereiten (Moll, 2013). Durch explizites Üben werden jene Probleme direkt angesprochen. Eine nähere Untersuchung erscheint an dieser Stelle sinnvoll.

Der *action proof* soll primär die Lernenden von einem Sachverhalt überzeugen (Semadeni, 1984). Dabei gibt es noch viele weitere Funktionen des Beweisens (Kuntze, 2005). Weiterhin existieren neben dem *action proof* auch noch andere didaktische Beweisformen. Besonders hervorzuheben sind dazu die auf der Arbeit von Semadeni basierenden Beweisformen des *prämathematischen Beweises* nach Arnold Kirsch sowie des *inhaltlich-anschaulichen Beweises* nach Müller und Wittmann (Biehler & Kempen, 2016). Dahingehende Untersuchung unter den verschiedenen Gesichtspunkten dieser Arbeit – insbesondere dem Einsatz von 3D-Druck – sollen in zukünftigen Arbeiten stattfinden.

Literatur

Biehler, R. & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 141–179. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0097-1

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht, 25*(1), 6–24.

Branford, B. (1913). *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Teubner.

Dilling, F. (2022). *Begründungsprozesse im Kontext von (digitalen) Medien im Mathematikunterricht: Wissensentwicklung auf der Grundlage empirischer Settings*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36636-0

Fischer, R. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* ([Neuaufl.], gedr. nach Typoskript). Profil-Verl.

KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).*

Krumsdorf, J. (2015). *Beispielgebundenes Beweisen* [Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors in den Erziehungswissenschaften]. Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Kuntze, S. (2005). „Wozu muss man denn das beweisen?“. Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe. *mathematica didactica, 28*(2), 48–70.

Moll, G. (2013). Mathematische Begründungsaufgaben in Vergleichsarbeiten der Grundschule. In: G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. https://doi.org/10.17877/DE290R-14090

Reichel, H.-C. (1980). Vollständige Induktion und die natürlichen Zahlen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, (5), 134–154.

Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2005). *5000 Jahre Geometrie*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/b138729

Semadeni, Z. (1984). Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32–34.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom* (First edition). Oxford University Press.