

Carina ZINDEL, Köln & Jürgen ROTH, Landau

Minisymposium 06: Entwicklung und Erforschung von (digitalen) Lernumgebungen zum Funktionalen Denken

Die mit der Tagung im März 2019 an der Universität Koblenz-Landau in Landau gegründete Gruppe „f3 - Fachdidaktische Forschungsperspektiven Funktionen“ tauscht sich als Zusammenarbeit mehrerer Standorte zum Thema Funktionales Denken regelmäßig in (Mini-)Symposien aus. Dies soll auch in Zukunft unter Einbeziehung weiterer Standorte und Forschender vorangetrieben werden.

Seit den Meraner Reformen 1905 um Felix Klein steht das Schlagwort „Erziehung zum Funktionalen Denken“ für eine flächendeckende Verbreitung des Begriffs mit all seinen Facetten im gesamten Mathematikunterricht. Lernende sollen *in Funktionen denken lernen*, d.h. funktionales Denken entwickeln (Vollrath, 1989). Dazu braucht es aber passende Lerngelegenheiten, die u.a. durch geeignete Lernumgebungen geschaffen werden können.

Gerade in den letzten Jahren gab es zunehmend Forschungsprojekte, die den Begriff „Funktionales Denken“ bzw. die Lernprozesse zum funktionalen Denken in den Mittelpunkt des Forschungsvorhabens stellen (z.B. Klinger, 2018; Lichti, 2019; Zindel, 2019; Ruchniewicz, 2022). Dabei spielen die zugrundeliegenden Lernumgebungen eine zentrale Rolle.

Der aktuelle Forschungsstand

Die Beiträge des Minisymposiums widmen sich der Thematik aus unterschiedlichen Perspektiven.

Für eine gezielte Förderung von Funktionsverständnis bedarf es geeigneter förderorientierter Diagnoseaufgaben. *Zindel und Khazaei* stellen in ihrem Beitrag einen Diagnose- und Förderbaustein zu linearen funktionalen Zusammenhängen vor und rekonstruieren Ressourcen und Schwierigkeiten der Lernenden.

Aufgaben zur Förderung von Funktionsverständnis sollten auch sprachsensibel sein, gerade für sprachlich schwache Lernende. *Zentgraf* zeigt in diesem Zusammenhang, wie der Aufbau von konzeptuellem Verständnis in der Füllgraphenumgebung gelingen kann.

Gerade beim Thema funktionales Denken wird zudem das Potenzial digitaler Lernumgebungen schon länger diskutiert. *Regel* präsentiert einen innovativen Ansatz zur Förderung des Funktionsverständnisses trigonometrischer Funktionen, indem diese als auditive Erlebnisse durch einen entsprechend konstruierten Synthesizers erlebbar gemacht werden.

Es sind aber natürlich nicht nur die Aufgaben, sondern vor allem die Lehrpersonen entscheidend. *Sproesser und Frey* zeigen in ihrer Interviewstudie, was Expertinnen und Experten verschiedener Länder unter funktionalem Denken verstehen.

Zwei weitere Beiträge konnten im Minisymposium leider krankheitsbedingt nicht vorgestellt werden, sind aber im vorliegenden Tagungsband enthalten.

Engelhardt und Roth stellen das von Lehrkräften für das Unterrichten mit interaktiven Arbeitsblättern zu funktionalen Zusammenhängen benötigte Wissen zusammen und untersuchen in einer Studie, inwiefern Mathematiklehramtsstudierende für die Sekundarstufen über dieses Wissen verfügen.

Ergebnisse aus 10 Jahren Landauer Forschungsarbeit zu Funktionalem Denken berichten *Digel, Lichti, Rolfes und Roth*. Diese münden in Anregungen für die konkrete unterrichtliche Gestaltung entsprechender Lehrgänge.

Vorträge im Minisymposium

Digel, S., Lichti, M., Rolfes, T., Roth, J.: So lässt sich funktionales Denken fördern: Eine Bilanz aus Landauer Studien

Engelhardt, A. & Roth, J.: Notwendiges Wissen für das Unterrichten funktionaler Zusammenhänge

Regel, N.: Auditive Erlebnisse als Ausgangspunkt für das Verketteten und Verknüpfen von Funktionen

Sproesser, U., Frey, K.: Was ist funktionales Denken und wie kann es im Unterricht adressiert werden? – Ergebnisse einer Interviewstudie

Zentgraf, K.: Aufbau von konzeptuellem Verständnis in der Füllgraphenumgebung für (Sprachen-)Lernende am Berufskolleg

Zindel, C., Khazaei, N.: Diagnose von Verstehensgrundlagen zu linearen funktionalen Zusammenhängen

Literatur

Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Springer.

Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern: Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Springer.

Ruchniewicz, H. (2022). *Sich selbst diagnostizieren und fördern mit digitalen Medien: Forschungsbasierte Entwicklung eines Tools zum formativen Selbst-Assessment funktionalen Denkens*. Springer.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10(1), 3–37.

Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen: Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung*. Springer.

Susanne DIGEL, Landau, Michaela LICHTI, Landau,
Tobias ROLFES, Frankfurt & Jürgen ROTH, Landau

So lässt sich funktionales Denken fördern: Eine Bilanz aus Landauer Studien

Funktionale Zusammenhänge sind Teil unseres Alltags. Bereits Kindergartenkinder machen die Erfahrung, dass ihre Körpergröße in Abhängigkeit von ihrem Alter zunimmt. Auch im Mathematikunterricht spielen funktionale Zusammenhänge eine wichtige und durchgehende Rolle. Von der Grundschule an setzen sich Lernende mit Mustern auseinander, erkennen darin Regelmäßigkeiten und setzen die Muster entsprechend fort. In der gymnasialen Oberstufe ist ohne ein grundlegendes Verständnis funktionaler Zusammenhänge eine Auseinandersetzung mit der Analysis nicht mehr vorstellbar. Im Lernprozess zu funktionalen Zusammenhängen kann eine Vielzahl von Fehlvorstellungen auftreten. Wir nennen hier beispielhaft den *Graph-als-Bild-Fehler*, der die Lernenden dazu verleitet, einen Funktionsgraphen nicht als Repräsentationsform eines funktionalen Zusammenhangs, sondern als Bild einer Situation zu interpretieren. Außerdem ist häufig die Fehlvorstellung *illusion of linearity* anzutreffen, bei der Lernende fälschlicherweise auch nicht-lineare funktionale Zusammenhänge als linear betrachten. (vgl. Hofmann & Roth, 2021 für eine Zusammenstellung typischer Schülerfehler im Zusammenhang mit Funktionen). Es wird deutlich, dass funktionales Denken, also die Fähigkeit mit Funktionen zu denken und zu arbeiten, relevant, allgegenwärtig und nicht trivial ist (Roth & Lichti, 2021).

Es werden vielfältige Forschungsanstrengungen unternommen, um zu identifizieren, wie Lehren und Lernen von funktionalem Denken auszugestaltet sind, um hohen Lernertrag bei den Lernenden zu erreichen. In diesem Beitrag werden Forschungsergebnisse der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen) an der Universität in Landau knapp zusammengestellt. Zur Vertiefung wird jeweils auf die daraus entstandenen Veröffentlichungen verwiesen. Aus Platzgründen handelt es sich ausschließlich um Veröffentlichungen unserer Arbeitsgruppe. Dort findet man aber jeweils vielfältige Verweise auf Ergebnisse anderer Autor*innen. Entsprechend kann es hier nicht darum gehen, die jeweils genutzten und weiterentwickelten Theorien zu referieren oder die Anlage der Studien darzustellen. Wir beschränken uns ausschließlich auf die Zusammenstellung wesentlicher Ergebnisse und verweisen für tiefere Rezeption unserer theoretischen und empirischen Vorgehensweisen in den diversen Studien auf die jeweils angegebene Literatur. Im Folgenden stellen wir Ergebnisse dar, die aufeinander aufbauen und jeweils die Erkenntnisse weiterentwickeln.

Funktionales Denken fördern und anwenden

Empirische Studien zur *Anwendung* funktionalen Denkens ergaben, dass Problemstellungen häufig besser anhand von Tabellen als anhand von Graphen gelöst werden können (Rolfes, 2018; Rolfes, Roth & Schnotz, 2018). Allerdings eigneten sich Graphen für die *Förderung* funktionalen Denkens im Allgemeinen besser als Tabellen, da Graphen in größerem Maße einen Transfer des Gelernten auf Tabellen ermöglichen als umgekehrt, während das multirepräsentationale Lernen mit Tabellen und Graphen insgesamt zu höheren Lernzuwächsen führte, aber mehr Zeit benötigte (Rolfes, 2018; Rolfes, Roth & Schnotz, 2022). Außerdem zeigte sich in einer experimentellen Studie, dass es insbesondere für den Aspekt der Kovariation vorteilhaft sein kann, funktionales Denken mit Hilfe dynamischer statt statischer Visualisierungen zu fördern (Rolfes, 2018; Rolfes, Roth & Schnotz, 2020).

Zur *Förderung* des funktionalen Denkens bereits vor der expliziten Thematisierung von Funktionen im Unterricht wurde der Einsatz von Experimenten mit Simulationen beziehungsweise mit gegenständlichen Materialien untersucht und verglichen (Lichti, 2019). Beide Medien wurden in vergleichbaren Lernumgebungen mit Tabelle und Graph verknüpft, die Lernenden arbeiteten multirepräsentational. Unter Verwendung eines eigens hierfür entwickelten Tests zum funktionalen Denken (Lichti & Roth, 2019a) ergab die quantitative Auswertung der Interventionsstudie, dass sowohl Simulationen als auch gegenständliche Materialien dazu geeignet sind, funktionales Denken zu fördern. Simulationen erzielten dabei aber einen signifikant größeren Effekt (Lichti & Roth, 2018a). Eine qualitative Analyse der Daten gab Hinweise darauf, dass Simulationen das Verständnis von Kovariation sowie die Verknüpfung von Situation und Graph unterstützen, Materialien hingegen das Verständnis der Zuordnung (Lichti & Roth, 2018b). Eine umfassende Förderung funktionalen Denkens sollte also beide Medien einschließen (Lichti & Roth, 2019, 2020, 2021).

Die Frage wie Simulationen und gegenständliches Material beim Experimentieren zur *Förderung* funktionalen Denkens kombiniert werden sollte, wurde in einer vergleichenden Prä-Post-Interventionsstudie untersucht (Digel & Roth 2020, 2021). Ein kombiniertes Experimentiersetting mit Hypothesenbildung und Messwerterfassung an gegenständlichem Material, gefolgt von Datentrepräsentation und -analyse mithilfe von Simulationen erzielte als Einstieg in das Thema Funktionen vergleichbare Erträge für das funktionale Denken wie das Experimentieren ausschließlich mithilfe von Simulationen (Digel, Engelhardt & Roth, im Druck; Digel & Roth, 2022). Demgegenüber zeigte sich ein qualitativ orientiertes Setting, das die Mess-