

Susanne DIGEL, Landau, Michaela LICHTI, Landau,
Tobias ROLFES, Frankfurt & Jürgen ROTH, Landau

So lässt sich funktionales Denken fördern: Eine Bilanz aus Landauer Studien

Funktionale Zusammenhänge sind Teil unseres Alltags. Bereits Kindergartenkinder machen die Erfahrung, dass ihre Körpergröße in Abhängigkeit von ihrem Alter zunimmt. Auch im Mathematikunterricht spielen funktionale Zusammenhänge eine wichtige und durchgehende Rolle. Von der Grundschule an setzen sich Lernende mit Mustern auseinander, erkennen darin Regelmäßigkeiten und setzen die Muster entsprechend fort. In der gymnasialen Oberstufe ist ohne ein grundlegendes Verständnis funktionaler Zusammenhänge eine Auseinandersetzung mit der Analysis nicht mehr vorstellbar. Im Lernprozess zu funktionalen Zusammenhängen kann eine Vielzahl von Fehlvorstellungen auftreten. Wir nennen hier beispielhaft den *Graph-als-Bild-Fehler*, der die Lernenden dazu verleitet, einen Funktionsgraphen nicht als Repräsentationsform eines funktionalen Zusammenhangs, sondern als Bild einer Situation zu interpretieren. Außerdem ist häufig die Fehlvorstellung *illusion of linearity* anzutreffen, bei der Lernende fälschlicherweise auch nicht-lineare funktionale Zusammenhänge als linear betrachten. (vgl. Hofmann & Roth, 2021 für eine Zusammenstellung typischer Schülerfehler im Zusammenhang mit Funktionen). Es wird deutlich, dass funktionales Denken, also die Fähigkeit mit Funktionen zu denken und zu arbeiten, relevant, allgegenwärtig und nicht trivial ist (Roth & Lichti, 2021).

Es werden vielfältige Forschungsanstrengungen unternommen, um zu identifizieren, wie Lehren und Lernen von funktionalem Denken auszugestaltet sind, um hohen Lernertrag bei den Lernenden zu erreichen. In diesem Beitrag werden Forschungsergebnisse der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen) an der Universität in Landau knapp zusammengestellt. Zur Vertiefung wird jeweils auf die daraus entstandenen Veröffentlichungen verwiesen. Aus Platzgründen handelt es sich ausschließlich um Veröffentlichungen unserer Arbeitsgruppe. Dort findet man aber jeweils vielfältige Verweise auf Ergebnisse anderer Autor*innen. Entsprechend kann es hier nicht darum gehen, die jeweils genutzten und weiterentwickelten Theorien zu referieren oder die Anlage der Studien darzustellen. Wir beschränken uns ausschließlich auf die Zusammenstellung wesentlicher Ergebnisse und verweisen für tiefere Rezeption unserer theoretischen und empirischen Vorgehensweisen in den diversen Studien auf die jeweils angegebene Literatur. Im Folgenden stellen wir Ergebnisse dar, die aufeinander aufbauen und jeweils die Erkenntnisse weiterentwickeln.

Funktionales Denken fördern und anwenden

Empirische Studien zur *Anwendung* funktionalen Denkens ergaben, dass Problemstellungen häufig besser anhand von Tabellen als anhand von Graphen gelöst werden können (Rolfes, 2018; Rolfes, Roth & Schnotz, 2018). Allerdings eigneten sich Graphen für die *Förderung* funktionalen Denkens im Allgemeinen besser als Tabellen, da Graphen in größerem Maße einen Transfer des Gelernten auf Tabellen ermöglichen als umgekehrt, während das multirepräsentationale Lernen mit Tabellen und Graphen insgesamt zu höheren Lernzuwächsen führte, aber mehr Zeit benötigte (Rolfes, 2018; Rolfes, Roth & Schnotz, 2022). Außerdem zeigte sich in einer experimentellen Studie, dass es insbesondere für den Aspekt der Kovariation vorteilhaft sein kann, funktionales Denken mit Hilfe dynamischer statt statischer Visualisierungen zu fördern (Rolfes, 2018; Rolfes, Roth & Schnotz, 2020).

Zur *Förderung* des funktionalen Denkens bereits vor der expliziten Thematisierung von Funktionen im Unterricht wurde der Einsatz von Experimenten mit Simulationen beziehungsweise mit gegenständlichen Materialien untersucht und verglichen (Lichti, 2019). Beide Medien wurden in vergleichbaren Lernumgebungen mit Tabelle und Graph verknüpft, die Lernenden arbeiteten multirepräsentational. Unter Verwendung eines eigens hierfür entwickelten Tests zum funktionalen Denken (Lichti & Roth, 2019a) ergab die quantitative Auswertung der Interventionsstudie, dass sowohl Simulationen als auch gegenständliche Materialien dazu geeignet sind, funktionales Denken zu fördern. Simulationen erzielten dabei aber einen signifikant größeren Effekt (Lichti & Roth, 2018a). Eine qualitative Analyse der Daten gab Hinweise darauf, dass Simulationen das Verständnis von Kovariation sowie die Verknüpfung von Situation und Graph unterstützen, Materialien hingegen das Verständnis der Zuordnung (Lichti & Roth, 2018b). Eine umfassende Förderung funktionalen Denkens sollte also beide Medien einschließen (Lichti & Roth, 2019, 2020, 2021).

Die Frage wie Simulationen und gegenständliches Material beim Experimentieren zur *Förderung* funktionalen Denkens kombiniert werden sollte, wurde in einer vergleichenden Prä-Post-Interventionsstudie untersucht (Digel & Roth 2020, 2021). Ein kombiniertes Experimentiersetting mit Hypothesenbildung und Messwerterfassung an gegenständlichem Material, gefolgt von Datentrepräsentation und -analyse mithilfe von Simulationen erzielte als Einstieg in das Thema Funktionen vergleichbare Erträge für das funktionale Denken wie das Experimentieren ausschließlich mithilfe von Simulationen (Digel, Engelhardt & Roth, im Druck; Digel & Roth, 2022). Demgegenüber zeigte sich ein qualitativ orientiertes Setting, das die Mess-

werterfassung mit gegenständlichem Material ans Ende stellt, dafür allerdings von Beginn an zum Experimentieren Simulationen und damit dynamische Visualisierungen (gemäß Rolfes, Roth & Schnotz, 2020) einsetzt, als wirksamer für das funktionale Denken, insbesondere für den Kovariationsaspekt (Digel, Engelhardt & Roth, im Druck; Digel & Roth, 2022). Dieser Vorsprung zeigte sich durchgängig sowohl auf unterschiedlichen Kompetenzniveaus der Lernenden als auch in Distanz- und Präsenzunterricht (Digel & Roth, 2022).

Resümee

Experimente mit Simulationen eignen sich besonders, um funktionales Denken zu fördern (Lichti & Roth, 2018a). Ihre dynamischen Visualisierungen sind gegenüber den statischen Visualisierungen gegenständlicher Materialien insbesondere für die Förderung des Aspekts der Kovariation von Vorteil (Rolfes, 2018; Rolfes, Roth, & Schnotz, 2020). Auch wenn Simulationen beim Einstieg in die *Förderung* funktionalen Denkens den gegenständlichen Materialien überlegen sind (Lichti & Roth, 2018a), sollten sie diese nicht ersetzen, da gegenständliche Materialien den Aspekt der Zuordnung unterstützen und das Modellieren fördern (Lichti & Roth, 2018b, 2020). Die Kombination aus beiden wird jedoch nur dann wirksamer, wenn durch einen qualitativen Experimentieransatz mit Simulationen von Beginn an eine dynamische Perspektive auf Funktionen ermöglicht wird und so ein Schwerpunkt in der Förderung des Kovariationsaspekts liegt (Digel & Roth, 2020, 2021, 2022, Digel, Engelhardt & Roth, im Druck).

Literatur

- Digel, S. & Roth, J. (2020). A qualitative-experimental approach to functional thinking with a focus on covariation. In A. Donevska-Todorova et al. (Hrsg.). *Proceedings of the 10th ERME Topic Conference Mathematics Education in the Digital Age (MEDA) 2020* (S. 167–174), Johannes Kepler University Linz, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02932218v1>
- Digel, S. & Roth, J. (2021). Do qualitative experiments on functional relationships foster covariational thinking? In M. Inprasitha et al. (Hrsg.). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (S. 193–200). PME. https://pme44.kku.ac.th/home/uploads/volumn/pme44_vol2.pdf#page=206
- Digel, S. & Roth, J. (2022). Selbstgesteuertes Lernen in Experimentierumgebungen zu funktionalen Zusammenhängen – Vergleich der Wirksamkeit für die Entwicklung funktionalen Denkens in Präsenz- und Distanzunterricht. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitales Lernen in Distanz und Präsenz*. Franzbecker.
- Digel, S., Engelhardt, A. & Roth, J. (im Druck). Digital gerahmte Experimentierumgebungen als dynamischer Zugang zu Funktionen. In J. Roth, M. Baum, K. Eilerts, G.

- Hornung & T. Trefzger (Hrsg.). *Die Zukunft des MINT-Lernens - Band 2: Digitale Tools und Methoden für das Lehren und Lernen*. Springer.
- Hofmann, R. & Roth, J. (2021). Lernfortschritte identifizieren – Typische Fehler im Umgang mit Funktionen. *Mathematik lehren*, 226, 15–19. https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2021/Hofmann_Roth_2021_Lernfortschritte_identifizieren_Typische_Fehler_im_Umgang_mit_Funktionen.pdf
- Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern – Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23621-2>
- Lichti, M. & Roth, J. (2018a). How to Foster Functional Thinking in Learning Environments Using Computer-Based Simulations or Real Materials. *Journal for STEM Education Research*, 1(1-2), 148–172. <https://doi.org/10.1007/s41979-018-0007-1>
- Lichti, M. & Roth, J. (2018b). Wie beeinflussen Simulationen das funktionale Denken? – Ergebnisse einer quantitativen Studie qualitativ beleuchtet. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.). *Digitales Lernen im Mathematikunterricht*. (S. 91–102). Franzbecker. https://www.uni-due.de/imperia/md/images/didmath/veranstaltungen/tagungen/akmdw/tagungsband_-_akmdw_2017.pdf#page=100
- Lichti, M. & Roth, J. (2019a). Functional thinking – A three-dimensional construct? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(2), 169–195, <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00141-3>
- Lichti, M. & Roth, J. (2019b). Funktionales Denken fördern – Computer-Simulationen oder gegenständliche Materialien nutzen? *Mathematik 5 – 10*, 49, 38–41. https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2019/Lichti_Roth_2019_Funktionales_Denken_foerdern.pdf
- Lichti, M. & Roth, J. (2020). Wie Experimente mit gegenständlichen Materialien und Simulationen das funktionale Denken fördern. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis (ZMFP)*, 1, 1–35. <https://doi.org/10.48648/cjee-y110>
- Lichti, M. & Roth, J. (2021). Der Einstieg in Funktionales Denken – Darstellungsform und passendes Medium. *Mathematik lehren*, 226, 10–14. https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2021/Lichti_Roth_2021_Einstieg_in_Funktionen.pdf
- Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken – Empirische Ergebnisse zum Einfluss von Statischen und dynamischen Repräsentationen*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22536-0>
- Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2018). Effects of Tables, Bar Charts, and Graphs on Solving Function Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39(1), 97–125. <https://doi.org/10.1007/s13138-017-0124-x>
- Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2020). Learning the Concept of Function With Dynamic Visualizations. *Frontiers in Psychology*, 11, 693. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00693>
- Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2022). Mono- and Multi-Representational Learning of the Covariational Aspect of Functional Thinking. *Journal for STEM Education Research*, 5(1), 1–27. <https://doi.org/10.1007/s41979-021-00060-4>
- Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren*, 226, 2–9. https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2021/Roth_Lichti_2021_Funktionales_Denken_entwickeln_und_foerdern.pdf