

Kerstin HEIN, Dortmund

Wie kann man formales Beweisen fördern? Entwicklungs- forschung zu Lehr-Lern-Arrangements in der Sekundarstufe

Das Erlernen des formalen Beweisens kann für die Lernenden bedeutsam sein, u.a. um einen Zugang zu mathematischem Wissen allgemein zu erhalten (Hanna & Barbeau, 2008), auch wenn formales Beweisen, hier ist das Herleiten mathematischer Sätze in deduktiven Schritten gemeint, nur eine Art des Begründens im Mathematikunterricht ist. Obwohl viele Studien die Herausforderungen beim Beweisen beschreiben (z.B. Harel & Sowder, 1998), gibt es nur wenig konkrete Unterrichtsansätze für die Sekundarstufen, die Lernende dabei unterstützen, die Herausforderungen zu bewältigen. Nach Stylianides et al. (2017) sollten die benötigten Unterrichtsansätze zum Beweisenlernen auf beweisspezifische Designprinzipien aufbauen und in konkreten Lehr-Lern-Arrangements realisiert werden. Im Folgenden werden Ansätze für die Entwicklung von Lehr-Lern-Arrangements zum Beweisen dargestellt.

Lerngegenstand ‚Formales Beweisen‘ als Grundlage für Designs

In der fachdidaktischen Entwicklungsforschung wird der Lerngegenstand sukzessive mit Hilfe von Designexperimenten und der Analyse von Lehr-Lern-Prozessen weiter spezifiziert (und strukturiert, hier nicht dargestellt), um darauf aufbauend diese gezielt mit Lehr-Lern-Arrangements adressieren zu können (Hußmann & Prediger, 2016). Als wichtige Teile des Lerngegenstandes Formales Beweisen wird in der Literatur häufig beschrieben: *Beweis als Produkt* (Beweistext) vs. *Beweis als Prozess* (Beweisaktivitäten wie Vermuten) bzw. der *mathematische Inhalt* und die dahinterliegende *logische Struktur*. Zu diesen Teilen des Lerngegenstandes werden insbesondere folgende Herausforderungen beschrieben wie die *Implizitheit des Lerngegenstandes*, der *Übergang vom Mündlichen zum Schriftlichen* und *herausfordernde Tätigkeiten* für die es besonderer Lerngelegenheiten bedarf (z.B. Stylianides et al., 2017).

Designprinzipien für Lehr-Lern-Arrangements zum Beweisen

Die Entwicklung eines Lehr-Lern-Arrangements sollte auf Grundlage von *Designprinzipien* entwickelt werden, welche Leitlinien sind, die Empirie- oder Literatur-gestützte intendierte Wirkungen haben (van den Akker, 1999). Designprinzipien sind dabei immer eng auf den Lerngegenstand bezogen. *Designelemente* sind dann die konkreten Teile des Lehr-Lern-Arrangements in denen die Designprinzipien konkret umgesetzt werden. Die konkreten Designentscheidungen sind dabei jedoch auch immer ein kreativer

Akt (diSessa & Cobb, 2004). Im Folgenden werden einige übergeordnete Designprinzipien aus dem Lerngegenstand formales Beweisen abgeleitet, die die unterschiedlichen Teile des spezifizierten Lerngegenstandes vom Beweisen adressieren: Unter dem Designprinzip *Explikation des Beweises* werden Inhalt und Logik wahrnehmbar gemacht, da diese oft implizit sind. Unter dem Designprinzip *Einfordern des Beweises* werden die herausfordernden Tätigkeiten vom Prozess bis zum Produkt eingefordert, um Lerngelegenheiten zu schaffen. Unter dem Designprinzip *Scaffolding der Beweistätigkeiten* werden Unterstützungen verstanden, die beim herausfordernden Beweisen helfen sollen, solange es nötig ist.

Vergleich von zwei Lehr-Lern-Arrangements

Im Folgenden werden exemplarisch zwei Lehr-Lern-Arrangements grob skizziert, die im Rahmen von Entwicklungsforschungsstudien aufzeigen, wie man auf Grundlage der Spezifizierung des Lerngegenstandes des Beweises Designprinzipien ableiten und Lehr-Lern-Arrangements gestalten kann.

Beispiel 1: Proof Without Words

Im Ansatz *Proof Without Words* (Nelsen, 1993) werden ausschließlich Bilder vorgegeben, anhand derer Beweise geführt werden. In dem Entwicklungsforschungsprojekt von Marco et al. (2022) versuchen die Autoren die Herausforderungen vom *Proof Without Words* wie die fehlende Begründungen und das Ausdrücken genereller Begründungen durch ein gezieltes Design des Lehr-Lern-Arrangements zu verbessern. Dafür lassen Marco et al. (2022) bewusst Informationen weg, damit ein*e Leser*in fehlende Aspekte ergänzt bzw. ein Beweisbedürfnis hat und dadurch mehr Begründungen evokiert werden. Der Ansatz ist vor allem auf die inhaltlichen Aspekte fokussiert. Auf dieser Grundlage leiten sie die folgenden vorläufigen Designprinzipien ab (nicht alle Designelemente werden im Artikel beschrieben): 1.) *Entdeckbarkeit der Beweisidee*, 2.) *Unterscheidbarkeit der Voraussetzungen* des zu beweisenden Satzes, 3.) *Sichtbarkeit der Konstruktion* (beschriebenes Designelement u.a. Pfeile), 4.) *Verheimlichung der Eigenschaften der Figur* (Designelement: fehlende Informationen wie rechte Winkel, die zum Beweisen anregen sollen), 5. *Explikation der menschlichen Handlung* (Designelement: Icon einer Hand) hinter einer Zeichnung, damit der Beweis nicht so fremd und abstrakt wirkt. In der Studie von Marco et al. (2022) begründen die Lernenden der Sekundarstufe mehr, wenn es inhaltliche Lücken gibt, indem sie diese füllen. Dies führen Marco et al. (2022) darauf zurück, dass die fehlenden Informationen die Lernenden verunsichern, was die Lernenden überwinden, indem sie selbst überlegen, welche Informationen noch aus den Voraussetzungen abgeleitet werden können.

Beispiel 2: „Mathematisch Begründen“ mit Sprache und Graphiken

In dem Projekt von Hein (2021) wird der Lerngegenstand *Logische Strukturen beim Beweisen und ihre Verbalisierung* adressiert, der sowohl als Prozess und Produkt verstanden wird, jeweils mit den logischen Strukturen im Blick, die oft unsichtbar sind. Damit werden die gegenstandsspezifische Designprinzipien abgeleitet (Hein, 2021, S. 103ff.): 1.) *Sprachliche und graphische Explikation logischer Strukturen* (Designelemente: explizite Sprache und Graphiken, die die logischen Strukturen explizieren, u.a. wird der Fokus auch auf die Voraussetzungen gelenkt), 2.) *Sprachliche und graphische interaktive Anregung strukturbezogener Beweisaktivitäten* (Designelemente: Beweis- und Sprachaufgaben, Graphiken, die ausgefüllt werden müssen), 3.) *Sprachliches und graphisches Scaffolding strukturbezogener Beweisaktivitäten* (Designelemente: Sprachangebote und Graphiken). Auf diese Weise werden in diesem Design Sprache und Graphiken eng miteinander verknüpft, um den herausfordernden Lerngegenstand zu adressieren (s. a.: Hein & Prediger, eingereicht).

Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Designprinzipien

Im Vergleich der beiden Beispiele, die sehr unterschiedlich sind – Marco et al. (2022) adressieren mehr den Inhalt, Hein (2021) adressiert mehr die logischen Strukturen – werden unterschiedliche Designprinzipien beschrieben, die jedoch den vom übergeordneten Lerngegenstand formales Beweisen zugeordnet werden können, wie im Folgenden aufgelistet wird: *Explikation des Beweises* (Entdeckbarkeit der Beweisidee; Unterscheidbarkeit der Voraussetzungen, vs. Sprachliche und graphische Explikation logischer Strukturen); *Einfordern der Beweistätigkeiten* (Verheimlichung der Eigenschaften der Figur vs. Beweis- und Sprachaufgaben bzw. Graphiken zum Ausfüllen) und *Scaffolding der Beweistätigkeiten* (Sichtbarkeit der Konstruktion vs. Sprachangebote und Graphiken). Die Zuordnung zu den übergeordneten Designprinzipien Explikation und Scaffolding ist fließend, da einige Designprinzipien sowohl beim Wahrnehmen als auch beim Ausführen eigener Tätigkeiten helfen könnten. Explikation ist beim Beweisen aufgrund der Implizitheit des Lerngegenstandes jedoch neben dem Scaffolding von Tätigkeiten äußerst wichtig, damit der Lerngegenstand überhaupt wahrgenommen wird. Beim Vergleich der ausdifferenzierten Designprinzipien in den übergeordneten Designprinzipien werden Gemeinsamkeiten deutlich, die beim Lerngegenstand adressiert werden: Beim übergeordneten Designprinzip Explikation werden beispielsweise in beiden Projekten die Bedeutung der Voraussetzungen betont, die im ersten Projekt inhaltlich durch Unterscheidbarkeit der Voraussetzungen vorliegt und im zweiten Projekt durch logische Trennung von Voraussetzung und Schlussfolgerung in den Graphiken.

Fazit

Der Vergleich der beiden exemplarischen Designs von Lehr-Lern-Arrangements (Hein, 2021; Marco et al., 2022) zeigt, dass bei der Entwicklung von Lehr-Lern-Arrangements zur Unterstützung des Beweisenlernens bestimmten Aspekte des Lerngegenstandes eine besondere Bedeutung zukommt, auch wenn unterschiedliche Designelemente letztlich in den Lehr-Lern-Arrangements eingesetzt werden. Der Vergleich von Lehr-Lern-Arrangements kann damit – zusätzlich zur zyklischen Weiterentwicklung in den einzelnen Projekten – genutzt werden, um die Designprinzipien als Brücke zwischen Lerngegenstand und Lehr-Lern-Arrangements im Sinne von Stylianides et al. (2017) weiter auszuschärfen, auch wenn dies immer auch ein kreativer Akt ist. Auf diese Weise kann die Fachdidaktische Entwicklungsforschung und der Vergleich von unterschiedlichen Projekten dabei helfen Designprinzipien und -elemente für den Lerngegenstand systematisiert und begründet zu entwickeln.

Literatur

- diSessa, A. & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 77–103.
- Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM – Mathematics Education*, 40(3), 345–353.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *CBMS Issues Mathematics Education*, 7, 234–283.
- Hein, K. (2021). *Logische Strukturen des Beweisens und ihre Verbalisierung – eine sprachintegrative Entwicklungsforschungsstudie zum fachlichen Lernen*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-35028-4>
- Hein, K. & Prediger, S. (eingereicht). *Scaffolds for seeing, using and articulating logical structures in proofs: Design Research study with high school students*.
- Hußmann, S. & Prediger, S. (2016). Specifying and structuring mathematical topics: A four-level approach for combining formal, semantic, concrete, and empirical levels exemplified for exponential growth. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 33–67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>
- Marco, N., Palatnik, A. & Schwarz, B. B. (2022, in press). Redesigning Proofs Without Words for secondary level mathematics. *Proceedings of CERME 12*.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words. 1: Proofs without words: exercises in visual thinking / Roger B. Nelsen*. Mathematical Assoc. of America.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.
- van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen & T. Plomp (Eds.), *Design approaches and tools in education and training* (pp. 1–14). Kluwer.