Christine STREIT, Basel

Frühes mathematisches Lernen begleiten: kindgerecht und anschlussfähig

Es besteht weitgehend Konsens, dass das frühe Lernen von Mathematik an Alltags- und Vorerfahrungen der Kinder anknüpfen und durch adaptives Handeln der Pädagog*innen begleitet werden sollte. Die Frage, wie mathematische Lernprozesse im Kindergarten konkret angeregt und gestaltet werden können, wird dagegen mit Blick auf das Spannungsfeld „kindgerecht" und „anschlussfähig" durchaus kontrovers diskutiert. Im Beitrag wird zunächst exemplarisch dargelegt, wie Kinder Zugänge zur Mathematik entwickeln und warum eine professionelle Unterstützung notwendig erscheint. Anschließend werden verschiedene Förderkonzepte und -praktiken vorgestellt. Dabei wird auch die pädagogische Fachkraft in ihrer Rolle als Lernbegleiterin in den Blick genommen. Zum Schluss wird am Beispiel materialbasierter Settings aufgezeigt, welches Potential diese für frühe mathematische Bildungsprozesse besitzen, aber auch wie bedeutsam und wie herausfordernd eine professionelle Begleitung in solchen Situationen ist.

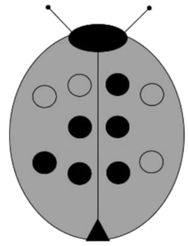
Kindliche Zugänge zu Mathematik

Dass wir überhaupt in der Lage sind, Mathematik zu betreiben, dafür haben wir wohl eine genetische Disposition. So zeigen wir eine gewisse Leichtigkeit im Umgang mit Mustern und Strukturen, man spricht vom *Structure Sense* (Linchevski & Livneh, 1999). Auch über eine Art *Zahlensinn* bzw. *frühe Zahlkonzepte* (Wynn, 1995) scheinen wir zu verfügen. Nun ist es allerdings nicht so, dass sich aus diesem *intuitiven* Wissen automatisch komplexere mathematische Vorstellungen entwickeln. Es ist eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung zum Erlernen der *kulturellen* Mathematik, welche sich durch zunehmende Schematisierung und Abstrahierung auszeichnet (Stern, 2003).

Exemplarisch sei dies an grundlegenden arithmetischen Kompetenzen aufgezeigt: Kinder weisen schon früh in kleinen Zahlenräumen bestimmte Fähigkeiten auf, können diese jedoch nicht „automatisch" auf größere Zahlen anwenden. Dazu sind spezifische Erfahrungen nötig. Manche Kinder sind auch auf gezielte Unterstützung angewiesen. Die Heterogenität in Bezug auf den Aufbau solcher Zahlkonzepte ist groß. Abbildung 1 zeigt Interviewausschnitte mit zwei Erstklässlern unmittelbar nach der Einschulung. Es wird deutlich, dass Lars Beziehungen zwischen den Teilen und dem Ganzen nutzt, um Anzahlen (nichtzählend) zu bestimmen. Als ein Punkt von der rechten Käferhälfte in die linke verschoben wird, sind es für ihn „immer noch 6". Er scheint bereits die Einsicht gewonnen zu haben, dass das Ganze gleichbleibt,

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

auch wenn sich die beiden Teilmengen durch Verschieben der Elemente von einer zur anderen Teilmenge ändern. Für Tim, der die Anzahl der Punkte zählend bestimmt, ist dies noch nicht selbstverständlich, er beginnt erneut zu zählen und wundert sich auch nicht, dass er nun ein anderes Ergebnis erhält (Schiefele, Streit & Sturm, 2019).

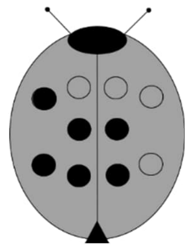


Lars (5 J.) und Tim (6 J.) werden in Einzelgesprächen befragt. Beiden Schülern wird ein Käfer mit 6 schwarzen (beweglichen) Punkten gezeigt. Die Frage lautet: „Wie viele schwarze Punkte siehst du?“

L. sagt spontan „7“.

T. tippt jeden Punkt mit dem Finger an und antwortet korrekt „6“.

Bei L. fragt die Interviewerin nach. Daraufhin erklärt er: „Hier ist die Drei vom Würfel und da die Vier. Zusammen sind das sieben…“ Der da… *er zeigt auf den oberen schwarzen Punkt in der linken Käferhälfte* …ist dann doppelt. … Sonst halt 6.“



Die Interviewerin verschiebt einen schwarzen Punkt von der rechten auf die linke Seite des Käfers: „Wie viele Punkte sind es jetzt?“

L. sagt sofort: „Immer noch 6. Jetzt 4 da und 2 da…“

T. beginnt erneut die Punkte anzutippen. Dabei berührt er einen Punkt doppelt und nennt nun als Ergebnis: „7“.

Abb. 1: Gespräch mit Lars und Tim (aus Schiefele, Streit & Sturm, 2019)

Wie bauen Kinder solche Konzepte auf? Ein Modell des bereichsspezifischen Wissens geht davon aus, dass sie sich auf der Basis unterschiedlicher mathematikspezifischer kognitiver Schemata entwickeln. Dazu gehören u.a. der durch angeborenes Wissen vorbereitete Erwerb der Zahlwortfolge sowie die sogenannten *protoquantitativen Schemata*, die sich auf das Mengenwissen beziehen (Resnick, 1983). Mit letzteren ist gemeint, dass Kinder bereits Vergleiche von bzw. Veränderungen bei Mengen sowie bestimmte Beziehungen zwischen (Teil-)Mengen erkennen, ohne dass sie die Anzahl der Elemente schon bestimmen können. Die beiden Schemata müssen durch Lernprozesse erweitert und miteinander verbunden werden, dadurch erhalten Zahlen eine quantitative Bedeutung und können in ihren Beziehungen zueinander verstanden werden. So entwickeln sich zwei zentrale Konzepte: *Anzahl-* und *Teile-Ganzes-Konzept* (ebd.). Sie spielen für das Zahlverständnis und für die Fähigkeit zum Anwenden flexibler Rechenstrategien eine zentrale Rolle. Das *intuitive* Wissen muss also genutzt und erprobt werden, damit sich *kulturelle* mathematische Inhalte wie das Rechnen mit natürlichen Zahlen usw. für die Kinder überhaupt erschließen können. Dazu benötigt es anregende Erfahrungen und eine professionelle Unterstützung (Stern, 2003).

Unterschiedliche Konzeptionen und Praktiken

Während die bewusste Initiierung mathematischer Lerngelegenheiten und die gezielte Förderung mathematischer Kompetenzen unbestritten in den Aufgabenbereich schulischer Bildung gehört, ist dies für den vorschulischen Bereich nicht so klar (Gasteiger, 2016). Entsprechend vielfältig sind die Praktiken und Konzeptionen zum frühen Lernen von Mathematik. Die unterschiedlichen Konzeptionen lassen sich grob zwischen zwei Polen einordnen: die gezielte *angebotsorientierte* und die *alltagsintegrierte, situative* Förderung (Kluczniok, Roßbach & Große, 2010). Daneben gibt eine Vielzahl von Konzeptionen, die sich im Grad der Offenheit und der Spezifität irgendwo zwischen diesen Polen bewegen. Dazu gehören zum Beispiel der gezielte Einsatz von (mathematischen) Regelspielen (Hauser et al., 2015) oder die Arbeit mit sogenannten konstruktiven Materialien (Royar et al., 2016). Die alltagsintegrierte, situative Förderung geht von einem kompetenten Kind aus, welches sich Wissen selbstbestimmt und durch eigene Aktivität aneignet (Kluczniok, Roßbach & Große, 2010). Im Gegensatz dazu versucht die angebotsorientierte Förderung mit strukturierten Angeboten und (enger) Führung durch die pädagogische Fachkraft mathematische Kompetenzen beim Kind gezielt zu fördern. Ein solches mathematisches Trainingsprogramm ist das MzZ (Mengen zählen Zahlen, Krajewski, Nieding & Schneider, 2007). Es ist entwickelt worden für eine (kompensatorische) Kleingruppenförderung und orientiert sich an Forschungserkenntnissen zur Entwicklung des arithmetischen Wissens. Frühere Untersuchungen dieses Programms führten zu signifikanten Lernzuwächsen gegenüber der Kontrollgruppe (Krajewski, Nieding & Schneider, 2008). Beim Einsatz in der Kindergartenpraxis erwies sich das MzZ in einer Schweizer Interventionsstudie allerdings für die Gesamtgruppe als nicht wirksamer als für die Kontrollgruppe. Nur die schwächeren Kinder profitierten signifikant davon (Vogt et al., 2018). Ganz andere Ergebnisse zeigten sich in derselben Studie für den (systematischen) Einsatz von mathematischen Regelspielen: Die spielorientierte frühe Matheförderung generierte im Vergleich zur Kontrollgruppe einen mehr als 40% höheren Lernzuwachs (ebd.). Auch verschiedene andere Studien konnten nachweisen, dass der Einsatz von Regelspielen positive Effekte auf arithmetische Kompetenzen der Kinder hat (z.B. Gasteiger & Möller, 2021). Regelspiele haben also ein großes Potential für das mathematische Lernen von Kindern, vor allem dann, wenn die Durchführung begleitet wird. In der o. e. Interventionsstudie waren die Regelspiele möglicherweise deshalb so erfolgreich, weil die Fachkräfte das gemeinsame Spiel strukturierten, Impulse gaben und Fragen stellten, Lösungsstrategien aufzeigten und so die Auseinandersetzung der Kinder mit Mathematik förderten

(Wullschleger & Stebler, 2016). Auch Schuler (2013) betont, dass das Potential von mathematischen Regelspielen erst durch eine individuelle Lernunterstützung der pädagogischen Fachkraft zur Entfaltung kommt. Ähnliches gilt für den Einsatz von *konstruktiven* Materialien (Royar et al. 2016). Konstruktive Materialien (wie Patternblocks, Spiel- oder Holzwürfel, Muggelsteine, Seile usw.) zeichnen sich dadurch aus, dass sie

- einen hohen Aufforderungsgehalt für Kinder haben,
- ein mathematisches Potential besitzen, welches sich in der Aktivität und Produkten der Lernenden zeigt,
- curriculare Bezüge aufweisen und damit anschlussfähig für das schulische Lernen von Mathematik sind.

Sie können sowohl in offenen Settings, also z.B. im Freispiel angeboten werden, als auch für eine systematische, lernzielorientierte Förderung eingesetzt werden (Royar & Streit, 2010; Royar et al. 2016). Sie spannen also gewissermaßen einen „Bogen“ zwischen den beiden oben beschriebenen Polen.

Die Pädagogische Fachkraft als Lernbegleiterin

Gerade in offenen Lern- und Spielsituationen des Kindergartenalltags stellt sich die Frage nach der adäquaten Begleitung von Lernenden, damit echte mathematische Lerngelegenheiten entstehen und individuelle Lernprozesse angeregt bzw. vertieft werden (Krammer, 2016). Eine solch adaptive Lernunterstützung findet in der Praxis jedoch nur bedingt statt. Stattdessen beschränken sich die Maßnahmen häufig auf disziplinare, organisatorische oder enge inhaltliche Anweisungen (z.B. König, 2009). Offene Fragen und Impulse, die auf den Aufbau von konzeptuellem Wissen zielen und die Kinder zu weiterführenden mathematischen Denkschritten anregen, sind eher die Ausnahme (Streit, 2016; 2018). Bruns und Eichen (2016) betonen, dass sich der Anforderungsgrad der Aktivitäten zumeist an einem mittleren Leistungsniveau der Gruppe orientiert und damit nur einem Teil der Kinder herausfordernde Aktivitäten ermöglicht werden. Am ehesten scheint eine fachliche Lernbegleitung im Rahmen inhaltlich anregender Lernumgebungen zu gelingen (Hopf, 2012). Lernförderliche mathematische Aktivitäten zeigen sich vor allem in Situationen mit fachlich ausgerichteter und auf Material gestützter Kommunikation (Schuler, 2013). Interaktionen scheinen besonders dann förderlich zu sein, wenn Lehrpersonen Geduld darin zeigen, die Kinder ihre Lösungsschritte selbständig vollziehen zu lassen und dann gezielt eingreifen, wenn sich eine produktive Gelegenheit bietet. Dieser Maßnahme geht meist eine längere Beobachtungsphase voraus; diese ist aber durch die Rahmenbedingungen in der Praxis nicht immer umsetzbar (Wullschleger & Stebler, 2016).

Die Ergebnisse überraschen nicht, eine fachliche Lernbegleitung in offenen Settings erfordert vielfältige Kompetenzen der Fachkräfte: Unter Rückgriff auf entsprechende Wissenskomponenten (fachlich, fachdidaktisch, pädagogisch) müssen sie die Situation professionell wahrnehmen (Fröhlich-Gildhoff et al., 2014) und erfassen, welches mathematische Potential sich im Produkt bzw. der Tätigkeit des Kindes zeigt, dabei eine curriculare Einordnung vornehmen und zugleich das Kind und seinen Entwicklungs- bzw. Lernstand im Blick haben (Streit, 2017). Die sich anschließende didaktisch-pädagogische Handlung, also ein Impuls, eine Frage etc., ist mehr als nur Routine, sie basiert auf diesen in der konkreten Situation gewonnen Erkenntnissen (ebd.).

Lerngelegenheiten schaffen in materialbasierten Settings

Um (angehende) Pädagog*innen beim Aufbau dieser komplexen Fähigkeiten zu unterstützen, wurde ein 5-Phasen-Modell für den Einsatz konstruktiver Materialien in der Praxis (Kindergarten und Anfangsunterricht) entwickelt, erprobt und evaluiert (Streit & Royar, 2014): In der Phase des *Anbietens* wird ein ausgewähltes Material präsentiert und den Kindern zum freien oder angeleiteten Tätigsein zur Verfügung gestellt. Es folgen die beiden eng zusammenhängenden Phasen des *Beobachtens* und *Stützens*. Die Beobachtung der kindlichen Aktivitäten ermöglicht es, Kenntnisse über die unterschiedlichen Zugänge, Fähigkeiten und Denkweisen der Kinder zu gewinnen. Zugleich dient diese Phase dazu, das mathematische Potential der Schüleraktivitäten und -produkte zu erfassen und einzuordnen, um dann ggf. gezielt mit entsprechenden Impulsen oder Fragen unter*stützen* zu können. Anschließend werden Ideen und Produkte der Kinder vorgestellt und besprochen (Phase 4 *Vorstellen*). Das kann z.B. in einem Rundgang oder durch eine Ausstellung geschehen. Ausgewählte Ideen bzw. Produkte der Kinder aus den Phasen 2 und 3 sind Ausgangspunkt für weiterführende bzw. gezieltere Fragen- und Aufgabenstellungen mit curricularer Anbindung. Die Phase des *Anknüpfens* (Phase 5) mündet in einem erneuten (zeitversetzten) *Anbieten*.

Ein Beispiel aus dem stufenübergreifenden Modellprojekt „Guter Mathestart“ (Streit & Royar, 2014) zeigt, wie gehaltvoll ein solches (mehrfaches) Anknüpfen sein kann: Im freien Tätigsein mit verschiedenfarbigen Spielwürfeln in großen Mengen entstanden vielfältige zwei- oder dreidimensionale Gebilde, die bestimmte Regelmäßigkeiten aufwiesen. Die Fachkraft fotografierte ausgewählte Produkte, ergänzte die Fotos um eigene Bildkarten von Würfelbauten und gab den Kindern beim ersten Anknüpfen die Aufgabenstellung, die Muster nachzubauen bzw. fortzusetzen. Ein Kind, welches sich mit einem wachsenden Muster beschäftigte, wies darauf hin, dass es für die Fortsetzung des Musters höhere Würfelzahlen benötige und fragte in diesem Zusammenhang: „Gibt es auch einen Würfel mit einer Zehn darauf?“ Diese Frage des Kindes inspirierte die Fachkraft zum Generieren von Aufgabenstellungen, die das erneute *Anknüpfen* (mit anderen Materialien) zu einem anregenden Lernanlass werden ließ:

- Gibt es einen „Würfel“ mit 10 Seiten?
- Wie können die Punktebilder aussehen?

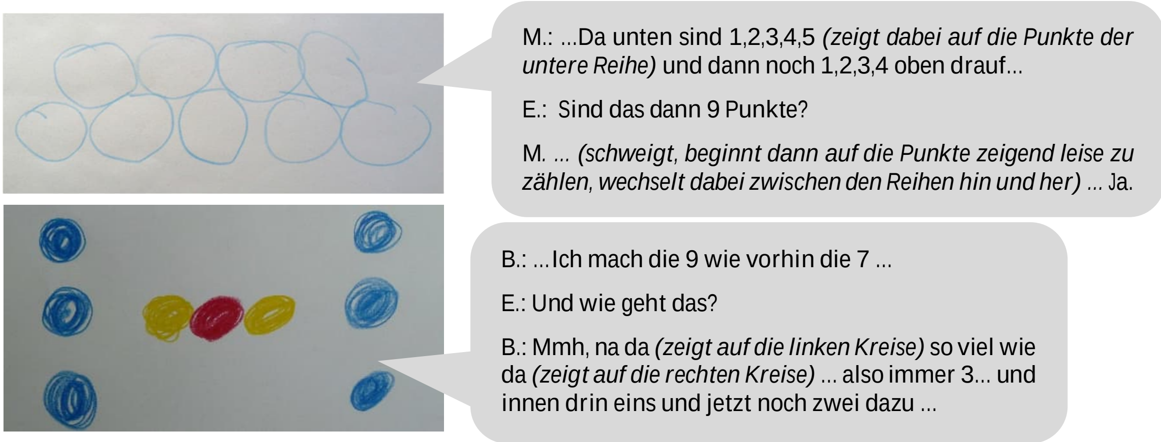


Abb. 2: Punktbilder der Zahl 9 und Erläuterungen der Kinder dazu

Mit Polydronmaterial entdeckten die Kinder auf diese Art und Weise die fünf platonischen Körper (Abb. 3, links) und stellten fest, dass es darunter zwar einen Zwölf-, aber keinen Zehnflächner gibt. Aus Muggelsteinen legten sie zudem Zahlbilder von 7 bis 10 (bzw. 12) und zeichneten ihre Bilder ab. In diesem Zusammenhang gewann die Fachkraft zusätzlich diagnostische Erkenntnisse über Anzahlvorstellungen der Kinder (Abb. 2). Schließlich wurde der Zwölfflächner mit Punktebildern beklebt (Abb. 3, rechts).

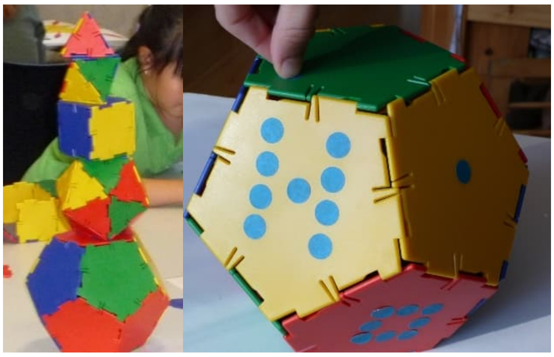


Abb. 3: Platonische Körper, erbaut mit Polydronmaterial

Das Beispiel macht deutlich, dass materialbasierte Settings ein großes Potential für das frühe mathematische Lernen aufweisen: Das vorgestellte Lernarrangement ist inhaltlich *anschlussfähig* in Bezug auf das schulische mathematische Lernen. Die Kinder machen spielerisch grundlegende arithmetische Erfahrungen und anspruchsvolle geometrische Entdeckungen. Es ist aber auch *kindgerecht*, da die Aufgabenstellung von einer Kinderäußerung inspiriert ist und die Erstellung der Punktebildern diagnostische Hinweise über die individuellen Lernstände liefert (Gasteiger, 2016).

Zugleich erfordert die Gestaltung bzw. Begleitung materialbasierter Settings umfangreiche professionelle Kompetenzen der Fachkräfte. Aus- und Weiterbildungsmaßnahmen müssen die verschiedenen Kompetenzfacetten in den Blick nehmen, um (angehende) Pädagog*innen bei diesen Herausforderungen zu unterstützen. Beispielsweise können videobasierte Fortbildungen nachweislich die situative Wahrnehmung der Fachkräfte schulen und damit wahrscheinlich auch deren pädagogisch-didaktische Handeln in der Praxis verbessern (Laubscher & Streit, i.V).

Literatur

Bruns, J. & Eichen, L. (2016). Individuelle Förderung im Kontext früher mathematischer Bildung. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 125–138). Springer.

Gasteiger, H. (2016). Frühe mathematische Bildung – sachgerecht, kindgemäß, anschlussfähig. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 9–26). Springer.

Gasteiger, H. & Moeller, K. (2021). Fostering early numerical competencies by playing conventional board games. *Journal of Experimental Child Psychology*, *204*, 1–15. https://doi.org/10.1016/j.nedt.2021.105060

Fröhlich-Gildhoff, K., Weltzien, D., Kirstein, N., Pietsch, S. & Rauh, K. (2014). *Kompetenzen früh-/kindheitspädagogischer Fachkräfte im Spannungsfeld von normativen Vorgaben und Praxis*. Zentrum für Kinder- und Jugendforschung.

Hauser, B., Rathgeb-Schnierer, E., Stebler, R. & Vogt, F. (2015). *Mathe ist mehr. Mathematische Frühförderung mit Regelspielen.* Kallmeyer.

Hopf, M. (2012). *Sustained Shared Thinking im frühen naturwissenschaftlichen-technischen Lernen.* Waxmann.

Kluczniok, K., Roßbach, H.-G. & Große, C. (2010). Fördermöglichkeiten im Kindergarten – ein Systematisierungsversuch. In A. Diller, H. R. Leu & T. Rauschenbach (Hrsg.), *Wie viel Schule verträgt der Kindergarten? Annäherung zweier Lernumwelten* (S. 133–152). DJI.

König, A. (2009). *Interaktionsprozesse zwischen ErzieherInnen und Kindern. Eine Videostudie aus dem Alltag des Kindergartens.* VS.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2007). *Mengen, zählen, Zahlen: Die Welt der Mathematik verstehen (MZZ)*. Cornelsen.

Krajewski, K., Nieding, G., & Schneider, W. (2008). Kurz- und langfristige Effekte mathematischer Frühförderung im Kindergarten durch das Programm „Mengen, zählen, Zahlen“. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 40*(3), 135–146.

Krammer. K. (2016). Die Bedeutung der Lernbegleitung im Kindergarten und am Anfang der Grundschule. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven* *mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 91–104). Springer Spektrum.

Laubscher, R. & Streit, C. (i.V.). Professionelle Wahrnehmung von pädagogischen Fachkräften durch videobasierte Weiterbildungsmassnahmen schulen.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–196.

Resnick, L. B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. In: H. P. Ginsburg (Ed.). *The Development of Mathematical Thinking* (S. 109–151). Academic Press.

Royar, T., Schuler, S., Streit, C. & Wittmann, G. (2016). MATHElino – Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 91–104). Springer Spektrum.

Schiefele, C., Streit, C. & Sturm, T. (2019). *Pädagogische Diagnostik und Differenzierung in der Grundschule - Mathe und Deutsch inklusiv unterrichten*. Ernst Reinhardt.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen.* Waxmann.

Stern, E. (2003). Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. In W. Schneider & M. Knopf (Hrsg.), *Entwicklung, Lehren und Lernen - Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert* (S. 207–217). Hogrefe.

Streit, C. (2016). Wie Lehrpersonen Kinder in materialbasierten Settings begleiten und mathematische Lernprozesse anregen. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.). *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 161–174). Springer.

Streit, C. (2017). Frühe mathematische Lernprozesse begleiten - Ergebnisse und Folgerungen aus dem Projekt Guter Mathestart. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1249–1252). WTM.

Streit, C. & Royar, T. (2014). Lernen zwischen Instruktion und Konstruktion – wie Instruktionen konstruktive Prozesse beim frühen Lernen von Mathematik unterstützen können. In E. Hildebrandt, M. Peschel, M. Weisshaupt (Hrsg.) *Lernen zwischen Lernen zwischen freiem und instruiertem Tätigsein* (S. 32–42). Klinkhardt.

Vogt, F., Hauser, B., Stebler, R., Rechsteiner, K. & Urech, C. (2018). Learning through play – pedagogy and learning outcomes in early childhood mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal, 26*(4), 589–603.

Wullschleger, A. & Stebler, R. (2016). Individuelle mathematikbezogene Lernunterstützung bei Regelspielen zur Förderung früher Mengen-Zahlen-Kompetenzen im Kindergarten. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 175–190). Springer.

Wynn, K. (1995). Infants possess a system of numerical knowledge. *Current Directions in Psychological Science, 4*(6), 172–177.