

Karen REITZ-KONCEBOVSKI, Potsdam

Die Algebra auf den Kopf gestellt – Davydovs Ansatz für den Anfangsunterricht im Kontext Didaktik der Algebra

Im Anfangsunterricht steht üblicherweise die Arithmetik im Mittelpunkt, der Zahlbegriffserwerb, Zählen, Mengen erfassen, Zahlen zerlegen, bündeln und das Verständnis für Stellenwerte, Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen. Algebraisches kommt nur am Rande vor, zum Beispiel bei der Betrachtung arithmetischer oder geometrischer Muster. Ganz anders der Ansatz von Davydov (1986; Dawydow, 1977), der international in den letzten Jahren zunehmend Beachtung gefunden hat (vgl. Venenciano et al., 2021): Hier beginnt der Anfangsunterricht Mathematik nicht mit Zahlen, sondern mit Größen und Beziehungen zwischen Größen. Gegenstände aus der Lebenswelt werdend miteinander verglichen hinsichtlich Höhe, Umfang, Masse, Volumen oder Anzahl. Die entsprechenden Relationen werden ikonisch durch gleich oder unterschiedlich lange Strecken und symbolisch mit Variablen und Relationszeichen (z. B. $A > B$ oder $K = T$) dargestellt. Die Kinder lernen Variable kennen, bevor sie Zahlen schreiben können. Zahlen werden als Verhältnisse von Größen zu Maßeinheiten eingeführt (z. B. gibt die Zahl 3 das Verhältnis des Volumens eines Gefäßes zum Volumen des kleineren Gefäßes, das zum Messen benutzt wird, an). Diese Definition passt nicht nur für natürliche, sondern auch für rationale Zahlen, die den Kindern somit von Anfang an zur Verfügung stehen. (Vgl. zu den angeführten Beispielen Davydov et al., 2019, S. 19, 30, 45). Dieses Vorgehen widerspricht der von den Bildungsstandards (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2005) nahegelegten Vorgehensweise, wie sie in Rahmenlehrplänen (z. B. für Berlin und Brandenburg, LISUM, 2015) umgesetzt wird. Welchen Sinn – außer allgemeiner Horizonterweiterung – kann es haben, dass sich Studierende des Primarstufenlehramts Mathematik mit Davydovs Ansatz beschäftigen?

Diese Frage soll zunächst aus einer praktischen, dann aus einer theoretischen Perspektive diskutiert werden. Der Beitrag stellt eine Lehreinheit zu Davydovs Ansatz im Rahmen einer universitären Lehrveranstaltung zur Algebra und ihrer Didaktik vor, ordnet sie in den Gesamtzusammenhang der Lehrveranstaltung ein und berichtet von ersten Erfahrungen. Die Rückmeldungen der Studierenden geben Hinweise auf den Erkenntnisgewinn, den sie aus der Lehreinheit gezogen haben. Eine theoretische Begründung erfolgt mit Bezug auf fachdidaktische Theorien zu Kernideen der Algebra (Kortenkamp & Kuzle, o.J.) und zur Entwicklung algebraischen Denkens (Hefendehl-Hebecker & Rezat, 2015) sowie auf die Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik (DMV et al., 2008).

Konzept einer Lehreinheit zu Davydovs Ansatz

Die hier vorgestellte Lehreinheit bildet den Abschluss einer Lehrveranstaltung zur Algebra und ihrer Didaktik im Masterstudium Lehramt Mathematik für die Primarstufe an der Universität Potsdam. Die Algebra wird hier zunächst als „Abstraktion“ von Arithmetik und Geometrie eingeführt, insofern sie gleiche Strukturen, die sich in verschiedenen mathematischen Inhaltsgebieten finden lassen, untersucht und beschreibt. Im weiteren Verlauf behandelt die Lehrveranstaltung Kernideen der Algebra – Variable, Terme, Gleichungen und funktionale Zusammenhänge (Kortenkamp & Kuzle, o.J.) – mit einem Fokus auf die Herausforderung für Lernende, die sich aus dem Übergang von einer operationalen (eher arithmetischen) zu einer strukturellen bzw. relationalen (das heißt algebraischen) Sichtweise (Hefendehl-Hebecker & Rezat, 2015) ergibt, beispielsweise der Bedeutungsveränderung des Gleichheitszeichens von einem Zuweisungs- oder Handlungszeichen zu einem Vergleichs- oder Relationszeichen oder der „Objektivierung“ im Sinne der Betrachtung von Termen (Operationen mit Variablen) oder Funktionen als eigenen mathematischen (Denk-)Objekten, mit denen man operieren, die man vergleichen oder verändern kann.

Die Lehreinheit zu Davydovs Ansatz beginnt mit dem Durchblättern und gemeinsamen Betrachten des Lehrbuchs für die erste Klasse (Davydov et al., 2019), wie oben skizziert mit Aufgaben zum Vergleichen nach verschiedenen Größen und deren ikonischer und symbolischer Darstellung bis hin zur Einführung von Zahlen und ihrer Darstellung an der Zahlengeraden. Die Dozentin übersetzt, wenn gefragt, die russischen Wörter und Sätze, die Studierenden überlegen, wie sie die Aufgaben lösen würden, und äußern spontan ihre Eindrücke. Anschließend wird das Beispiel zur Einführung der Addition aus der Studie Mellone et al. (2018) zusammen mit dem dort dokumentierten Unterrichtsgespräch und Bildern von der Arbeit der Schüler*innen betrachtet. Eine erste Diskussion entzündet sich an den Fragen: Was ist für Sie merkwürdig, ungewöhnlich, überraschend? Können Sie sich vorstellen, im Anfangsunterricht so vorzugehen? Was würden Sie in Hinblick auf das Lernen der Schüler*innen bei einem solchen Vorgehen erwarten? Im zweiten Teil der Lehreinheit werden Ergebnisse empirischer Studien zur Realisierung des Davydov-Ansatzes (Mellone et al., 2018; Polotskaia & Sabena, 2018; Schmittau, 2005; Venenciano et al., 2021) vorgestellt, theoretischer Hintergrund zu diesem Ansatz vermittelt und Vergleiche zu den bisher in der Lehrveranstaltung behandelten didaktischen Konzepten gezogen. Die Abschlussdiskussion greift die Fragen aus der ersten Diskussionsrunde wieder auf und nimmt außerdem die Frage in den Blick: Welchen Nutzen ziehen Sie als Mathematik-Lehramtsstudierende aus der Beschäftigung mit Davydovs Ansatz?

Erfahrungen und Reflexionen

Die skizzierte Lehreinheit wurde pilotweise im Mai 2022 mit einer kleinen Gruppe von Studierenden, die die Lehrveranstaltung Algebra und ihre Didaktik im vergangenen Semester besucht hatten, durchgeführt, um Rückmeldungen zu sammeln und das Konzept für die Umsetzung am Ende des Sommersemesters 2022 weiterzuentwickeln. In ihren Rückmeldungen unterstrichen die Studierenden den systematischen Aufbau des Lehrbuchs und die sorgfältige Einführung von Begriffen und damit verbundenen Tätigkeiten, die Anknüpfung an die Lebenswelt der Kinder und die Verknüpfung verschiedener mathematischer Leitideen bereits in den ersten Aufgaben. Sie bemerkten, dass von Anfang an das relationale Denken geschult wird und die Kinder so nicht nur rechnen lernen, sondern gleich „richtig Mathe machen“. Sie äußerten ihr Bedauern, dass dies in unserem Anfangsunterricht fehlt: „Wenn ich auf diese Weise Mathe gelernt hätte, hätte ich manche meiner Probleme mit der Algebra nicht gehabt.“ Sie stellten allerdings auch fest, dass das Vorgehen eine große Herausforderung an das Denkvermögen der Kinder stellt – möglicherweise eine Überforderung für manche? Wie gehen Kinder, die Anzeichen von Dyskalkulie aufweisen, mit diesen Aufgaben um? Würden sie erst recht abgehängt – oder wäre dieses Vorgehen im Gegenteil eine Chance für sie? Neben solchen Fragen gab es auch kritische Anmerkungen, insbesondere zum Fehlen des kardinalen Zahlbegriffs: Das Zählen und Bestimmen von Anzahlen ist so nah an der Lebenswelt der Kinder, dass es unnatürlich erscheint, das nicht aufzugreifen. Sollte nicht neben dem Maßzahlbegriff auch der kardinale Zahlbegriff entwickelt werden? Jedenfalls befürworteten die Studierenden eine Anreicherung des üblichen Curriculums für den Anfangsunterricht durch Aufgaben aus Davydovs Lehrbuch.

Begründungen und Schlussfolgerungen

Davydov (1986; Dawydow, 1977) formuliert als Ziel seines Curriculums, dass Kinder an das *theoretische Denken* herangeführt werden sollen. Im Unterschied zum *empirischen Denken* als der Fähigkeit, Dinge und Erscheinungen nach Merkmalen zu klassifizieren, ist das theoretische Denken charakterisiert durch die Analyse und Offenlegung der genetischen Beziehungen innerhalb des „Systems“ von Dingen und Erscheinungen. Das theoretische Denken geschieht nicht nur im Kopf, sondern äußert sich in praktischen Tätigkeiten, beispielsweise mit grafischen Modellen oder Symbolen. Definitionen für das „algebraische Denkens“ etwa bei Mellone et al. (2019, S. 248) oder Hefendehl-Hebecker & Rezat (2015, S. 132f.) lesen sich wie Konkretisierungen des *theoretischen Denkens* nach Davydov in Hinblick auf die Mathematik. Die Beschäftigung mit Davydovs Ansatz kann Studierende anregen, ihr Verständnis für das algebraische Denken auszuscharfen.

Zudem fördert die skizzierte Lehreinheit zur Beschäftigung mit diesem alternativen Ansatz für Algebra im Anfangsunterricht mathematikdidaktische „Basiskompetenzen“ im Sinne der Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik: Die Studierenden „bewerten Bildungsstandards [...] und nutzen sie reflektiert für die Unterrichtsgestaltung“ sowie „rezipieren fachdidaktische Forschungsergebnisse und vernetzen sie mit ihren Kenntnissen“ (DMV et al., 2008). Wie die oben berichteten Erfahrungen aus der Pilotdurchführung zeigen, kann die Begegnung mit Davydovs Ansatz darüber hinaus die Entwicklung spannender weiterführender Forschungsfragen anregen.

Literatur

- Davydov, V. V. (1986). *Problemy razvivajuščego obučenija [Probleme des entwickelnden Unterrichts]*. Pedagogika.
- Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G. & Savel'jeva, O. V. (2019). *Matematika. 1 klass. Učebnik*. Binom.
- Dawydow, W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht*. Volk und Wissen.
- DMV, GDM & MNU. (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 16(3), 149–159. <https://doi.org/10.1515/dmvm-2008-0057>
- Hefendehl-Hebecker, L. & Rezat, S. (2015). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 117–148). Springer Spektrum.
- Kortenkamp, U. & Kuzle, A. (o.J.). Didaktischer Kommentar. In LISUM (Hrsg.), *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht: Leitidee Gleichungen und Funktionen*.
- LISUM. (2015). *Rahmenlehrplan Teil C Mathematik, Jahrgangsstufen 1 – 10*. Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg.
- Mellone, M., Carotenuto, G., Di Bernardo, R. & Punzo, C. (2018). Algebraic thinking among graphical representations and algebraic symbols. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 247–254). PME.
- Polotskaia, E. & Sabena, C. (2018). Foregrounding Davydov's curriculum: Relational approach and algebraic thinking in early grades. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 245). PME.
- Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 16–22. <https://doi.org/10.1007/BF02655893>
- Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Luchterhand.
- Venenciano, L., Polotskaia, E., Mellone, M. & Radford, L. (2021). An introduction to multiple perspectives on Davydov's approach in the XXI century. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 323–326. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10040-5>