Imke SCHWERIN, Paderborn

Verdoppeln und Halbieren im 2. Schuljahr – Vorgehensweisen und Verständnis

Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben wird als sog. einfachen Aufgaben im Zahlenraum bis 20 eine besondere Bedeutung zugewiesen (u.a. Gaidoschik, 2010). Darüber hinaus kann das Verdoppeln bzw. Halbieren als Schnittstellenoperation angesehen und somit additiv und multiplikativ bzw. subtraktiv und divisiv gedeutet werden. Im Rahmen einer Interviewstudie werden auf Grundlage unterschiedlicher Aufgaben die Vorgehensweisen und das Verständnis von Zweitklässler*innen beim Bearbeiten von Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben im Zahlenraum bis 100 erforscht.

Forschungsstand und -desiderat

Bereits Piaget befasste sich in Untersuchungen zum Zerlegen eines Ganzen in Teile mit dem Halbieren. Dabei waren bereits sehr junge Kinder in der Lage, Flächen, Quader sowie Anzahlen materialbasiert zu halbieren, die Gleichheit der Hälften und die Reversibilität der Operation zu erkennen (Piaget & Szeminska, 1975). Dass Kinder vor Eintritt in die Grundschule vorliegende Mengen vor allem durch abwechselndes Verteilen bzw. eine Eins-zu-Eins-Zuordnung halbieren, konnten u.a. Hunting und Davis (1991) zeigen.

Rottmann (2006) untersuchte die Entwicklung des Verständnisses der Begriffe das Doppelte und die Hälfte von Kindern am Übergang Elementarbereich-Grundschule. Es wurde deutlich, dass Kinder am Ende des 1. Schuljahres im Zahlenraum bis 20 überwiegend fehlerfrei verdoppeln und halbieren können, aber noch Schwierigkeiten bei der Bezeichnung dessen, was genau das Doppelte bzw. die Hälfte ist, haben. Einschränkend festzuhalten ist, dass die Erkenntnisse aufgrund des Aufgabensettings tendenziell Bearbeitungen am Material (z.B. Kugeln am Rechenrahmen, Bonbons) fokussieren und z.B. Vorgehensweisen des Zahlenrechnens nicht gezielt in den Blick genommen wurden. Gaidoschik (2010) zeigte, dass Kinder Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben im 1. Schuljahr im Vergleich zu anderen Aufgaben früher und häufiger automatisiert abrufen können. Dies vermuteten in Bezug auf Verdopplungsaufgaben bereits Groen und Parkman (1972), die durch Reaktionszeitmessungen Rückschlüsse auf das Lösungsvorgehen von Kindern im Bereich des Kleinen Einspluseins zu ziehen versuchten. Die Reaktions- und Lösungszeiten bei Verdopplungsaufgaben führten die Forschenden auf eine frühe Automatisierung aufgrund der besonderen Charakteristik der Aufgaben und klammerten infolgedessen Verdopplungsaufgaben in der Auswertung aus. Auch Carpenter und Moser (1984) sparten Verdopplungs- und

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Halbierungsaufgaben in ihrer Untersuchung zu kindlichen Vorgehensweisen bewusst aus, da diese ein untypisches Vorgehen hervorrufen oder früher als andere Aufgaben durch Abrufen gelöst würden.

Zusammenfassend ist davon auszugehen, dass Kinder am Ende des 1. Schuljahres Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben im entsprechenden Zahlenraum lösen und im Vergleich zu anderen Aufgaben häufiger automatisiert abrufen können. Allerdings scheint demgegenüber wenig bekannt, wie Kinder bei Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben vorgehen, wenn sie diese nicht automatisiert abrufen oder am Material bearbeiten. Lohnend kann deswegen auch der Blick in den höheren Zahlenraum sein, da Vorgehensweisen des Zahlenrechnens stärker in den Fokus rücken: Inwieweit behalten Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben ihren einfachen Charakter? Wie genau gehen Kinder beim Verdoppeln und Halbieren vor?

Forschungsdesign

Um diesen Fragen nachzugehen wurden im 2. Schuljahr halbstandardisierte Interviews nach der revidierten klinischen Methode (Ginsburg, 1981; Selter & Spiegel, 1997) geführt, um die individuellen Vorgehensweisen und das dahinterliegende Verständnis der Kinder erfassen zu können. Durch den Einsatz geeigneter Aufgaben (s.u.) sowie gezielter Rückfragen zum individuellen Vorgehen sollen Vorgehensweisen und Verständnisaspekte sichtbar gemacht werden. Die Interviews wurden zu zwei Erhebungszeitpunkten geführt: Die erste Erhebung fand unmittelbar nach der Zahlraumerweiterung und vor der Thematisierung der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 statt, um das intuitive Vorgehen zu erfassen. Der zweite Erhebungszeitpunkt war nach der Behandlung der Multiplikation und Division angesetzt, sodass mögliche Veränderungen durch das Erlernen der Multiplikation und Division in den Blick genommen werden können.

Für das Interviewsetting wurden vier Aufgabentypen in verschiedenen Darstellungen unter Berücksichtigung wesentlicher Kriterien guter Aufgaben (Schütte, 2008) entwickelt, die zudem unterschiedliche Bereiche abdecken. Zunächst soll das Doppelte bzw. die Hälfte von mit Plättchen als Feld und in linearer Form gelegten Anzahlen (Abb. 1) sowie von gelegten Geldwerten ermittelt werden, woran sich in Aufgabe 2 das Verdoppeln und Halbieren unterschiedlicher Zahlen in symbolischer Form anschließt. Im Zentrum der dritten Aufgabe stehen Serien von Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben, bei denen die Beziehung zwischen Zahlen bzw. Aufgaben erkannt und genutzt werden kann (Abb. 1). Aufgabe 4 fokussiert als Vernetzungsaufgabe, inwieweit der Zusammenhang zwischen dem Verdoppeln und Halbieren (das Doppelte der Zahl 7 – die Hälfte der Zahl 14), aber auch zwischen den beiden Operationen und den Grundrechenarten (Addition zweier gleicher Summanden ($7 + 7$) – Multiplikation mit 2 ($2 \cdot 7$) – die Frage nach dem Doppelten von 7) erkannt wird.

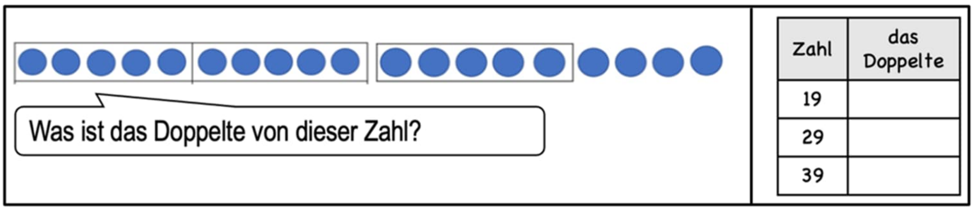

Abb. 1: Beispielaufgaben der Aufgabentypen 1 und 3

Zentrales Merkmal des Interviewsettings ist, dass Zahlen im Zahlenraum bis 20 und bis 100 in verschiedenen Aufgaben wiederholt vorkommen, sodass sich ein situations- und darstellungsabhängiges Vorgehen bzw. Verständnis zeigen kann. Im Kontext der Halbierungsaufgaben wird auch nach der Hälfte ungerader Zahlen gefragt.

Im Rahmen der Untersuchung soll auf Grundlage der durchgeführten Interviews folgenden übergeordneten Forschungsfragen nachgegangen werden: 1) Welche Vorgehensweisen lassen sich rekonstruieren? 2) Welches Verständnis zeigen Kinder? 3) Inwieweit sind Vorgehensweisen und Verständnis aufgaben- bzw. darstellungsabhängig? 4) Wie entwickeln sich Vorgehensweisen und Verständnis im Verlauf des 2. Schuljahres?

Datenauswertung und Ausblick

Grundlage für die Datenauswertung bilden die transkribierten sprachlichen Äußerungen sowie die Handlungen und Gestiken der Kinder. Unter der Annahme, dass sich das Denken bzw. Verständnis eines Menschen in seinem Sprechen und Tun zeigt, wird zur Datenauswertung die Theorie der konzeptuellen Felder nach Vergnaud (u.a. 1996) herangezogen. So sollen Vorgehensweisen und das dahinterliegende Verständnis der Kinder bezüglich des Verdoppelns und Halbierens rekonstruiert werden. Der Theorie liegt zugrunde, dass sich Wissen in Schemata organisiert und diese in bestimmten Situationen ausgewählt und angewendet werden. Zentrale Bestandteile eines Schemas sind operationale Invarianten, die die Wahrnehmung und Verarbeitung einer Situation, aber auch den Umgang mit dieser Situation steuern. Unterschieden werden operationale Invarianten in theorems- und concepts-in-action, wobei das Suffix ‚in-action' den Handlungscharakter betont. Theorems-in-action sind (Sprach-)Handlungen, die vom Individuum in einer bestimmten Situation für wahr gehalten werden und resultieren aus der Aktivierung vermeintlich relevanter Schemata. Ermöglicht wird die situationsspezifische Auswahl und Aktivierung möglicherweise relevanter Schemata, die für die vorliegende Situation am passendsten erscheinen durch concepts-in-action. Während theorems-in-action mathematisch als richtig oder falsch bewertet werden können, handelt es sich bei concepts-in-action um eine individuelle Einschätzung, sodass diese nur als relevant oder irrelevant für die gegenwärtige Situation angesehen werden können (Vergnaud, 1996). In Bezug auf das Verdoppeln und Halbieren können Schritte im Vorgehen wie z.B. das Zerlegen einer mehrstelligen Zahl in Zehner und Einer, diese getrennt zu verdoppeln und wieder zusammenzufügen oder das Nutzen der Addition zweier gleicher Summanden, um eine Zahl zu verdoppeln, als theorems-in-action erfasst werden. Da nur die theorems-in-action als (Sprach-)Handlungen des Kindes zu erfassen sind, wird ausgehend von ihnen interpretativ auf mögliche concepts-in-action geschlossen. Das Beispiel des theorems-in-action, bei dem eine mehrstellige Zahl zerlegt, die Teile einzeln verdoppelt und zum Gesamtergebnis zusammengefügt werden, könnte das concept-in-action ‚Vorstellung über Zerlegbarkeit und Zusammensetzbarkeit von Zahlen' abgeleitet werden. Die Addition zweier gleicher Summanden könnte aus dem concept-in-action ‚Additive Deutung des Verdoppelns' resultierend gedeutet werden. Ziel ist, für das Verdoppeln und Halbieren relevante theorems- und concepts-in-action zu rekonstruieren, um das Verständnis eines Kindes anhand dieser beschreiben zu können.

Literatur

Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1984). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One through Three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179–202.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder Rechnen lernen - Oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Peter Lang.

Ginsburg, H. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques. *For the Learning of Mathematics*, *3,* 4–11.

Groen, G. J. & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, *79*(4), 329–343.

Hunting, R. P. & Davis, G. E. (1991). Dimensions of Young Children's Conceptions of the Fraction One Half. In Ebd. (Hrsg.), *Early Fraction Learning* (S. 27–53). Springer.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* Klett.

Rottmann, T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte" und „das Doppelte": Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Franzbecker.

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. Oldenbourg.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Klett.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 219–239). Lawrence Erlbaum.