

Klaus GIEBERMANN, Mühleim an der Ruhr

Digitale Paper & Pencil-Aufgaben

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das digitale Paper & Pencil-System vorgestellt, das die Vorteile digitaler und handschriftlicher Aufgaben miteinander verbinden soll. Einerseits werden Aufgaben parametrisiert und automatisch korrigiert, andererseits haben Studierende die Möglichkeit, den vollständigen Lösungsweg anzugeben, der anschließend schrittweise überprüft wird. Mit dem System können Aufgaben zu Termumformungen, Grenzwerten, Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen inklusive Fallunterscheidungen und Proben behandelt werden. Für die Eingabe kompletter Lösungswege wird eine zweidimensionale Eingabeoberfläche vorgestellt. Zum Schluss wird der Einsatz des Systems an der Hochschule Ruhr West beschrieben.

Einleitung

Der Einsatz digitaler Aufgaben in der Hochschullehre bietet eine Reihe von Vorteilen gegenüber analogen Formen. So ermöglichen sie das zeit- und ortsunabhängige Bearbeiten von Aufgaben, das mit einer automatischen Korrektur einhergehen kann (Giebermann & Friese, 2016). An der Hochschule Ruhr West kommen seit 2013 digitale Aufgaben in den mathematischen Grundlagenveranstaltungen für Ingenieure zum Einsatz. Anfänglich als Ergänzung zu regulären handschriftlichen/analoge Übungsblätter, dann in Form von digitalen Übungsblätter und seit 2016 im Rahmen von digitalen Lern-Landkarten (Giebermann & Friese, 2018). In dem letztgenannten Einsatzszenario können Studierende Aufgaben so lange bearbeiten, bis sie gezeigt haben, dass sie Aufgaben eines bestimmten Typs sicher lösen können, bevor sie schwierigere Aufgaben erhalten. Digitale Aufgaben können einerseits durch eine Parametrisierung und Randomisierung der Aufgabenparameter mehrfach eingesetzt werden, andererseits können diese interaktive Elemente beinhalten, die in dieser Form bei handschriftlichen Aufgaben nicht möglich sind. Dies können z.B. interaktive Grafiken sein oder Werkzeuge, mit denen etwa lineare Gleichungssysteme semiautomatisch gelöst werden können (vgl. <https://lti.mint-web.de/examples/index.php?id=01010301>). Die Historie des Einsatzes digitaler Aufgaben spiegelt den Wandel von einem Prüfungs- hin zu einem Lernsystem wider und zeigt, welche Möglichkeiten der Einsatz digitaler Formate bieten kann.

Gegenüber klassischen, handschriftlichen Formaten haben digitale Aufgaben aber auch erhebliche Nachteile. So werden oftmals nur Endergebnisse

überprüft, in dem diese mit einer Referenzlösung verglichen wird oder es werden Eigenschaften getestet, wenn es keine eindeutige Lösung gibt. Alternativ können Zwischenergebnisse abgefragt werden, wodurch aber der Lösungsweg fest vorgegeben wird. Das Ziel des hier vorgestellten Systems ist es, die Vorteile digitaler Aufgaben mit den Vorteilen klassischer Aufgaben zu verbinden. Dies erfordert einerseits die Möglichkeit, komplette Lösungswege effizient eingeben zu können, andererseits müssen die Lösungen schrittweise kontrolliert werden können.

Zweidimensionale Eingabe

Die erste Fragestellung ist, wie die Eingabe mathematischer Formeln und ganzer Rechenwege möglichst intuitiv gestaltet werden kann. Die Eingabe erfolgt üblicherweise zeilenweise und folgt der Notation des zugrundeliegenden Kontrollsystems. So wird etwa bei dem STACK (Sangwin, 2004) die Notation von Maxima, bei JACK (Schwinning et. al, 2014) das Computer Algebra System SAGE und bei MathWeb (Giebermann & Friese, 2016) die AsciiMath Notation verwendet. Ein Problem bei dieser Form der Eingabe ist, dass Studierende die zu schreibende Formel zunächst in eine formale, vom Computer lesbare Form übertragen müssen. In vielen Systemen wird die Eingabe in einen Abstract Syntax Tree (AST) umgewandelt und anschließend weiterverarbeitet. Diese Form der Eingabe kann gerade bei Studierenden des ersten Studienjahres ein erhebliches Problem darstellen. Statt einer zeilenweisen, d. h. eindimensionalen Eingabe, wird bei dem Paper & Pencil-System eine zweidimensionale Eingabeform verwendet. Dabei wird der Eingabebereich durch ein Kästchenraster in Zellen zerlegt, wobei jede Zelle maximal ein Zeichen enthalten kann. Zeichen können in ihrer Größe variiert werden, so dass etwa das Minuszeichen auch als Bruchstrich oder als komplexe Konjugation genutzt werden kann. Potenzen und Indizes ergeben sich aus der relativen Position zueinander. Abb. 1 zeigt die Eingabe eines komplexeren Terms in der zweidimensionalen Form sowie die LaTeX-Ausgabe der internen Repräsentation. Um diesen Ausdruck etwa in Maxima einzugeben, müsste die folgende Zeichenkette verwendet werden:

$$\text{sqrt}((1-x^2)/(1+\text{abs}(x))).$$

Wie unschwer zu erkennen ist, fordert die Eingabe in der eindimensionalen Notation einen erheblichen Abstraktionsaufwand.

Abb. 1: Eingabe eines Wurzeltermes (links) und Darstellung der internen Repräsentation durch LaTeX (rechts)

Analyse des Lösungswegs

Die Grundidee bei der Korrektur durch das Paper&Pencil System besteht darin, dass Studierende das System davon überzeugen müssen, dass eine gefundene Lösung einerseits richtig ist und andererseits es auch keine weiteren Lösungen gibt. In diesem Sinne ist die Lösung einer Aufgabe im Kern ein kleiner mathematischer Beweis. Zu einer gegebenen Aufgabe kennt das System daher weder die Lösung noch den Lösungsweg. Stattdessen sind Prämissen, der Name der gesuchten Größe und ggf. Einschränkungen an Parameter bekannt. Weiterhin kennt das System eine Reihe von Umformungsregeln. Eine Aufgabe gilt erst dann als gelöst, wenn eine vollständige Argumentationskette von der Prämisse hin zum Endergebnis vorliegt. Die Herleitung kann Äquivalenzumformungen, Fallunterscheidungen und Proben beinhalten. Ist die Argumentationskette an einer Stelle unterbrochen, so wird das Endergebnis, auch wenn es richtig sein sollte, nicht akzeptiert.

Jeder Teilschritt und jede Umformung wird von dem System kontrolliert und muss nachvollziehbar sein. Es konnte kein Computeralgebrasystem (z.B. Maxima) verwendet werden, da diese Systeme zu „mächtig“ sind. Stattdessen werden eigene Bibliotheken verwendet, die auch schon bei MathWeb zum Einsatz kommen. Dies ermöglicht es im Detail festzulegen, welche Umformungen akzeptiert werden. Dadurch soll insbesondere verhindert werden, dass Studierende nur das Endergebnis aufschreiben. Aktuell können mit dem System Aufgaben zu Gleichungen und Ungleichungen inklusive der Nutzung von Parametern behandelt werden.

Einsatz an der Hochschule Ruhr West

Das vorgestellte System kommt seit dem WiSe 2021/22 für formative Assessment in den Modulen Ingenieurmathematik I und II in den Studiengängen Maschinenbau und Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau an der Hochschule Ruhr zum Einsatz. Die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben ist eine Prüfungsvorleistung. Während des Semesters konnte die kontinuierliche Nutzung und Bearbeitung des neuen Aufgabenformats beobachtet werden. Die intensive Auseinandersetzung mit den Lösungswegen konnte auch an

der Nutzung des Diskussionsforums im Kurs mit insgesamt 135 Themen beobachtet werden.

Ausblick

Die vorgestellte zweidimensionale Eingabe kann durch eine handschriftliche Zeicheneingabe und Zeichenerkennung erweitert werden. Ein nicht unerheblicher Anteil der Studierenden an der HRW nutzt gegenwärtig Tablets oder Tablet-PCs, die auch eine Stifteingabe unterstützen. Diese erweiterte Eingabemöglichkeit könnte zu einem noch natürlicheren Umgang mit dem System beitragen.

Bei klassischen digitalen Aufgaben wird gelegentlich versucht, Fehlerquellen anhand des Endergebnisses zu ermitteln. Dieser Ansatz stößt aber schon bei mittelschweren Aufgaben mit mehr als zwei Umformungsschritten schnell an seine Grenzen. Insbesondere bei parametrisierten Aufgaben ist es aus Sicht des Verfassers nicht sinnvoll möglich, hier hilfreiche Fehlermeldungen zu liefern. Der neue Ansatz bietet die Möglichkeit, Fehler in Einzelschritten zu erkennen und zu analysieren. Hier könnte zukünftig ein Subsystem entwickelt werden, welches jeden einzelnen Umformungsschritt auf bekannte Fehlermuster hin untersucht und gegebenenfalls eine entsprechende Rückmeldung liefert.

Literatur

Sangwin, C. (2004). Assessing mathematics automatically using computer algebra and the internet. *Teaching Mathematics and its Applications*, 23, 1–14. doi:10.1093/teamat/23.1.1

Schwinning, N., Schypula, M., Striwe, M. & Goedicke, M. (2014, July). *Concepts and realisations of flexible exercise design and feedback generation in an e-assessment system for mathematics*. Paper presented at the Joint Proceedings of the MathUI, OpenMath and ThEdu Workshops and Work in Progress track at CICM co-located with Conferences on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2014).

Giebermann, K. & Friese, N. (2016). MathWeb – Interaktive Online-Demonstrationen und Aufgaben zur Ergänzung von Mathematikvorlesungen. In W. Paravicini & J. Schnieder (Hrsg.), *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2015. Beiträge zum gleichnamigen Symposium am November 2015 an Universität Lübeck* (S. 44–50). WTM.

Giebermann, K. & Friese, N. (2018). MathWeb – interaktives Lernen in Mathematikmodulen. *die Hochschullehre, Jahrgang 4*, 361–376.