Katharina BÖCHERER-LINDER, Freiburg

Schnittstellenaufgaben in Mathematikvorlesungen: Nicht nur für Lehramtsstudierende ein Gewinn

Hintergrund und Motivation

Das Grundproblem der mathematischen Fachausbildung im gymnasialen Lehramtsstudium ist in der Literatur vielfach beschrieben: Viele Lehramtsstudierende nehmen Schulmathematik und universitäre Mathematik als voneinander getrennte Welten wahr (z.B. Hefendehl-Hebeker, 2013). Infolgedessen haben sie Schwierigkeiten, das im Studium erworbene fachliche Wissen für späteres fachdidaktisches Handeln im Unterricht zu aktivieren. Studien weisen darauf hin, dass Lehramtsstudierende zusätzliche Lerngelegenheiten zum Erkennen der Zusammenhänge zwischen schulischer und akademischer Mathematik benötigen (z.B. Hoth et al., 2020).

An der Universität Freiburg ist im Rahmen des Mathematikstudiums für das gymnasiale Lehramt eine 2-stündige Vorlesung zur „Elementargeometrie“ vorgesehen, die die fachlichen Inhalte im Bereich der Geometrie abdecken soll (RahmenVO-KM). Hierbei handelt es sich um eine rein fachwissenschaftliche Vorlesung, die unter anderem die axiomatische Grundlegung sowie Interpretationen der Axiomensysteme, auch durch nicht-euklidische Geometrien, beinhaltet. Die Vorlesung „Elementargeometrie“ an der Universität Freiburg richtet sich sowohl an Studierende des gymnasialen Lehramts wie auch Studierende des Bachelor of Sciences, Mathematik. Im Unterschied zu Vorlesungen der Geometrie, die speziell für Lehramtsstudierende entwickelt wurden (siehe z.B. Hoffmann, 2020), werden Schulbezüge in der Vorlesung selbst nicht herausgearbeitet.

Um dennoch den Bezug für das Lehramt zu stärken und die Vorlesung „Elementargeometrie“ mit der fachdidaktischen Ausbildung zu vernetzen, hat die Autorin als Fachdidaktikerin gemeinsam mit der Mathematikerin und Dozentin der Elementargeometrie, Prof. Dr. Huber-Klawitter, für die wöchentlichen Übungsaufgaben jeweils eine Aufgabe mit Schulbezug passend zum Vorlesungsstoff entwickelt und im Rahmen eines Lehrprojektes im Sommersemester 2021 erstmals eingesetzt. Die besondere Herausforderung dieses Projektes lag darin, für eine Vorlesung, die strukturmathematisch geprägt ist und selbst keine Schulbezüge explizit entwickelt, passende Anknüpfungspunkte zu finden und diese für Schnittstellenaufgaben fruchtbar zu machen. In der Lehrevaluation der Elementargeometrievorlesung wurde das Projekt sehr positiv aufgenommen.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Schnittstellenaufgaben auch für Mathematikstudierende ein Gewinn?

Die Weiterentwicklung des Projektes im laufenden Sommersemester 2022 setzt nun den Fokus auf die Frage, ob bzw. wie auch Mathematikstudierende im Bachelor of Science- Studiengang von Schnittstellenaufgaben profitieren können. Eine Reflexion der bereits eingesetzten Übungsaufgaben ergab, dass Bezüge zur Schulmathematik häufig über zugrundeliegende Kernideen oder auch fundamentale Ideen hergestellt wurden. Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel wie eine fundamentale Idee (Betrachtung von Invarianz als zugrundeliegende Idee sowohl in der Schulmathematik als auch in der Hochschulmathematik) für die Aufgabenkonstruktion genutzt werden kann.

Aufgabe: Parkettierung

Schon in der Grundschule werden Parkettierungen genutzt, um das Erkennen von Mustern und Strukturen zu fördern (Parkette legen, Parkette weiterzeichnen, Parkette selbst erfinden, …). Die Regelmäßigkeiten, die solchen Mustern zu Grunde liegen, lassen sich mathematisch mit Hilfe von Invarianzabbildungen beschreiben.

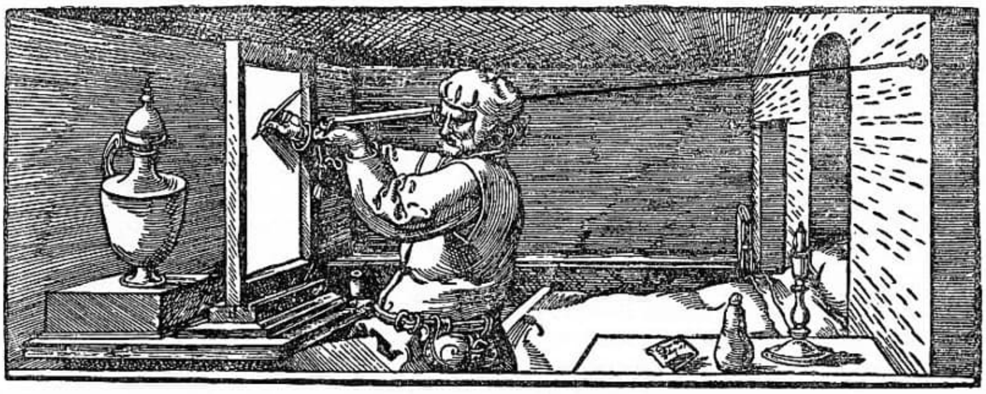
Frage: Welche Abbildungen lassen das nebenstehende Parkett invariant? Beschreiben Sie diese (unendlich vielen) Abbildungen möglichst systematisch.

Abb. 1: Beispielaufgabe: Nutzung der fundamentalen Idee der Invarianz für die Konstruktion einer Schnittstellenaufgabe.

Alternativ wurde für die Aufgabenkonstruktion häufig ein vorstellungsorientierter Ansatz gewählt, der nach einer inhaltlich-anschaulichen Deutung der abstrakten Konzepte fragt. In Abbildung 2 wird ein Beispiel gezeigt, in dem die Definition des projektiven Raumes anschaulich gedeutet wird. Angeregt durch diese Aufgabe wurde in den Mathematik-Tutoraten die Frage diskutiert, wie die Punkte des projektiven Raumes entstehen und welche Vorstellung man mit der Definition eines projektiven Raumes verbinden kann. Für beide Ansätze ist die Vermutung naheliegende, dass hiervon nicht nur Lehramtsstudierende, sondern auch Studierende der Mathematik ohne Lehramtsoption profitieren.

Aufgabe: Projektion

Als Projektion des 3-dimensionalen Raumes auf eine 2-dimensionale Ebene lernen die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht die Parallelprojektion und im Kunstunterricht die Zentralperspektive kennen. Von Albrecht Dürer stammt der folgende Holzschnitte mit dem Titel 'Perspektivmaschine' (1525).



a) Erläutern Sie das dargestellte Verfahren.
b) Stellen Sie eine Beziehung her zwischen dem Verfahren von Albrecht Dürer und der Definition des projektiven Raumes aus der Vorlesung:

Definition 1.13. *Sei V ein k-Vektorraum. Der* projektive Raum $\mathbb{P}(V)$ *über V ist die Menge der Nullpunktsgeraden in V, d.h. die Menge der Untervektorräume der Dimension 1. Wir definieren* $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$.

Abb. 2: Beispielaufgabe: Nutzung einer inhaltlich-anschaulichen Deutung für die Konstruktion einer Schnittstellenaufgabe.

Forschungsfragen:

Im laufenden Sommersemester 2022 werden weitere Aufgaben für die Elementargeometrievorlesung entwickelt, die einerseits einen Schulbezug herstellen, andererseits aber auch Studierende der Mathematik ohne Lehramtsoption dazu einladen, über inhaltliche Deutungen, Konzeptionen und Grundideen der Elementargeometrie nachzudenken. Dabei interessieren uns besonders zwei Fragen:

- Werden die Aufgaben mit Schulbezug auch von Mathematikstudierenden ohne Lehramtsoption bearbeitet?
- Inwiefern profitieren Studierende von den Aufgaben mit Schulbezug?

Die erste Frage stellt sich auch deswegen, da nach unserer Konzeption die Schnittstellenaufgaben nicht verpflichtend sind, die Studierenden dadurch aber Bonuspunkte sammeln können. Zur Beantwortung der zweiten Frage sind leitfadengestützte Interviews am Ende des Semesters geplant, bei denen sowohl Lehramtsstudierende als auch Mathematikstudierende ohne Lehramtsoption befragt werden. Die Probanden werden dabei gebeten, aus dem Pool der Schnittstellenaufgaben des Semesters diejenigen Aufgaben auszuwählen, die sie als besonders hilfreich erlebt haben. Anschließend werden sie gebeten, ihre Auswahl zu begründen. In den Interviews soll herausgearbeitet werden, ob es sich bei den Gründen für die Auswahl vor allem um rein fachliche Aspekte (CK, Dreher et al., 2018), schulbezogene fachliche Aspekte (SRCK, Dreher et al., 2018) oder motivationale Aspekte handelt.

Die Beantwortung der Forschungsfragen kann einen Hinweis geben, welche Art von Übungsaufgaben geeignet sind, Verstehen und Vorstellungen der Studierenden zu unterstützen, und welche Ansätze für die Konstruktion solcher Aufgaben hilfreich sind.

Literatur

Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A. & Niemand, C. (2018). What Kind of Knowledge do Secondary Mathematics Teachers need? Journal für Mathematik-Didaktik, *39*, 319–341. https://doi.org/10.1007/s13138-018-0127-2

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer. DOI 10.1007/978-3-658-01360-8_1

Hoffman, M. (2020). Zirkel und Lineal ohne Parallelenaxiom. Ein konstruktiver Zugang zur hyperbolischen Geometrie. *Der Mathematikunterricht*, 66(6), 36–47.

Hoth, J., Jeschke, C., Dreher, A., Lindmeier, A. & Heinze, A. (2020) Ist akademisches Fachwissen hinreichend für den Erwerb eines berufsspezifischen Fachwissens im Lehramtsstudium? Eine Untersuchung der Trickle-down-Annahme. *Journal für Mathematik-Didaktik, 41*, 329–356. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00152-0