Erik HANKE, Bremen

Aspekte und Vorstellungen vom komplexen Wegintegral

Für zentrale Konzepte aus der reellen Analysis wie das (Riemann-)Integral stellt die fachdidaktische Forschung und Lehrwerksliteratur bereits seit Langem zahlreiche fachliche und anschauliche Zugänge bereit (z.B. Greefrath et al., 2016). Für die Funktionentheorie, insbesondere das komplexe Wegintegral, gibt es bislang nur vereinzelte Beiträge (z.B. Oehrtman et al., 2019; Hancock, 2018; Hanke, 2020a). Da die Funktionentheorie aber in verschiedenen mathematischen Studiengängen vorkommt (auch in der Lehramtsausbildung und in Service-Veranstaltungen), stellt sich die Frage nach fachlichen sowie vorstellungsorientierten Zugängen zu den „komplexen" Versionen der Konzepte, die Studierende zuvor „reell" kennenlernen.

Die Ergebnisse der einzigen bisher verfügbaren Fallstudie (Oehrtman et al., 2019) und meine Forschung (Hanke, 2020a) deuten jedoch darauf hin, dass selbst Expert*innen inhaltlich-anschauliche Vorstellungen vom komplexen Wegintegral eher fehlen. In meinem Forschungsprojekt widme ich mich daher neben einer fachlich-epistemologischen Klärung des komplexen Wegintegrals auch der deskriptiven Erschließung von Vorstellungen seitens Expert*innen. Da zudem wenig geklärt ist, wie mathematische Vorstellungen zu fortgeschrittenen hochschulmathematischen Inhalten überhaupt aussehen können, wurde für ihre Erschließung ein diskursiver Zugang (Sfard, 2008) gewählt. Insofern plädiert dieser Beitrag auf theoretischer Ebene dafür, „diskursive Vorstellungen" zu einem Gegenstand hochschulmathematikdidaktischer Forschung zu machen, auch wenn die Kombination von „Vorstellungen" und „Diskurs" auf den ersten Blick ein Oxymoron zu sein scheint (Hanke, 2020a, 2020b). In meinem Beitrag gehe ich daher folgender komplementär gedachten Fragestellung nach: „Wie sehen *Aspekte* und *Vorstellungen* für das komplexe Wegintegral aus?"

Mathematische Diskurse und diskursive mathematische Vorstellungen

Dem *commognitive framework* (Sfard, 2008) liegt die Prämisse zugrunde, dass *Denken* und *Kommunizieren* eine Einheit sind. Insofern charakterisiert dieses Framework mathematische Diskurse anhand des Gebrauchs von Schlüsselworten (z.B. „komplexes Wegintegral"), visuellen Mediatoren (z.B. Graphen oder die spezielle Notation $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für das komplexe Wegintegral von f längs dem Weg γ), Routinen (wiederholbare diskursive Handlungen) sowie zwischen Individuen als gültig ausgehandelte und akzeptierte Narrative. Narrative sind dabei Sequenzen kommunikativer Äußerungen, mithin „Geschichten", über mathematische Objekte und/oder Mathematiktreibende. Dazu gehören beispielsweise auch Definitionen oder Theoreme.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Unter einer *diskursiven Vorstellung* verstehe ich nun ein Narrativ in *intuitiven mathematischen Diskursen*, das von visuellen Mediatoren gestützt sein kann (Hanke, 2020a; 2020b). Mit einem intuitiven mathematischen Diskurs ist diejenige Form der Kommunikation gemeint, die sich ergibt, wenn Mathematiktreibende einen mathematischen Gegenstand anschaulich präsentieren und auf das zurückgreifen, was sie zu ihren Vorstellungen oder intuitiven Erklärungen zählen. Dabei gehen sie jedoch nicht notwendig logisch-deduktiv vor. Dieser Vorstellungsbegriff verzichtet demnach auf eine kognitiv orientierte Konzeptualisierung und betont stattdessen das durch Kommunikation Zugängliche. Diskursive Vorstellungen mathematischer Objekte als Narrative mit möglicher Unterstützung durch visuelle Mediatoren aufzufassen, heißt dann auch, nach den Umständen ihrer Produktion im diskursiven Zusammenhang zu fragen.

Aspekte vom komplexen Wegintegral

Greefrath et al. (2016) sprechen von *Aspekten*, um die zentralen Konzepte der reellen (Schul-)Analysis fachlich zu klären. Unter einem Aspekt verstehen sie „ein[en] Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann" (Greefrath et al., 2016, S. 17). Roos (2020) hebt darüber hinaus hervor, dass manche Aspekte bloß ‚partiell', d.h. in einem eingeschränkten mathematischen Kontext, adäquat seien. Außerdem fragt sie, welchen Mehrwert eine Unterscheidung von ‚Definitionen', ‚Sätzen' und ‚Aspekten' genau habe (Roos, 2020).

Insofern erscheint es mir an dieser Stelle gerade im Hinblick auf hochschulmathematische Objekte sinnvoll, unter einem *(diskursiven) Aspekt* eines mathematischen Objekts nun ein *Narrativ* zu verstehen, das als Definition dienen kann oder sich als äquivalent zu einer solchen herausstellt. Aspekte lassen sich demnach anhand ihrer Definientia (d.h. der „definierenden Teile" in einer Definition) sowie bezuggenommener mathematischer Diskurse unterscheiden. Mit einem *partiellen Aspekt* ist dann ein Aspekt gemeint, der unter zusätzlichen einschränkenden Bedingungen gültig ist. Für das komplexe Wegintegral zählen hier solche Narrative als Aspekte, die $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für (stückweise) stetig differenzierbare Wege $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und stetige Funktionen $f\colon \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{C}$ festlegen. In den partiellen Aspekten werden aber zusätzliche Anforderungen an γ oder f gestellt.

Als ein Ergebnis der Analyse der Voraussetzungen in Definitionen, der Beziehungen zu anderen Integralen (z.B. reellen Wegintegralen) sowie zu Integralsätzen identifizierte ich *vier Aspekte* und *vier partielle Aspekte* von komplexen Wegintegralen (Tabelle 1). Dabei sichtete ich ca. 50 Lehrwerke zur Funktionentheorie sowie historische Quellen. Beispielsweise werden beim *Vektoranalysis-Aspekt* die Real- und der Imaginärteile komplexer Wegintegrale mit reellen Wegintegralen identifiziert: $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \mathrm{Re}f\,\mathrm{d}x - \mathrm{Im}f\,\mathrm{d}y + i\int_\gamma \mathrm{Im}f\,\mathrm{d}x + \mathrm{Re}f\,\mathrm{d}y$. Der von mir entwickelte *partielle funktorielle Aspekt* ist meiner Kenntnis nach neu und schafft einen axiomatischen Zugang zum komplexen Wegintegral für holomorphe Funktionen auf einfach zusammenhängenden Gebieten im Sinne der *Kovariation* einer Abbildung der Form $I\colon \{\mathrm{Wege}\} \times \{\mathrm{holom.\,Fkt.}\} \to \mathbb{C}, (\gamma, f) \mapsto I(\gamma, f)$.

Aspekte	*Produktsummen*	*Substitution*	*Vektoranalysis*	*Mittelwert*
Partielle Aspekte	*Stammfunktion*	*residuell*	*Greenscher Typ*	*funktoriell*

Tab. 1: Aspekte und partielle Aspekte vom komplexen Wegintegral

Vorstellungen vom komplexen Wegintegral

Zu den Ergebnissen meiner Interviewstudie mit Experten der Funktionentheorie gehören neun diskursive Vorstellungen vom komplexen Wegintegral. Wie bei den (partiellen) Aspekten kann hier nur ein Teil von ihnen dargestellt werden. Die diskursiven Vorstellungen waren insbesondere von Nützlichkeitsabwägungen, Integralsätzen oder Querbezügen zu anderen mathematischen Diskursen geprägt und fallen in vier Gruppen:

- Ablehnung einer eigenständigen Bedeutung (z.B. „Das komplexe Wegintegral hat keinerlei geometrische Bedeutung“),
- Gebrauchs-Vorstellungen (z.B. „Das komplexe Wegintegral ist ein mächtiges Werkzeug, mit dem man viele Dinge beweisen kann“),
- Querverbindungen zu anderen mathematischen Konzepten (z.B. „Komplexe Wegintegrale sind Wegintegrale 3. Art“),
- von Theoremen inspirierte Vorstellungen (z.B. „Die Bedeutung des komplexen Wegintegrals ist eine gewichtete Summe von Residuen“).

Auffällig ist, dass kein Experte eine anschaulich-geometrische Vorstellung (etwa im Sinne der Flächeninhalts-Vorstellung für das Riemann-Integral) formulierte. Zwar beinhalteten die aufgedeckten diskursiven Vorstellungen vom komplexen Wegintegral manchmal bildliche Elemente, um einen Integrationsweg oder einen Integranden darzustellen, bildliche Elemente für die komplexe Zahl $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ selbst traten aber nicht auf.

Fazit

Es wurde ein Zugang vorgeschlagen, einen hochschulmathematischen Gegenstand aus zwei Blickwinkeln zu durchleuchten: Ausgehandelte und in ihrer Reichweite abgesteckte fachliche Aspekte des komplexen Wegintegrals wurden durch die Rekonstruktion diskursiver Vorstellungen von Experten komplementiert. So wurden (partielle) Aspekte herausgearbeitet, mit denen das komplexe Wegintegral fachlich im Hinblick auf verschiedene Definientia festgelegt werden kann. Die zutage geförderten diskursiven Vorstellungen unterstrichen, dass Vorstellungen vom komplexen Wegintegral seitens der befragten Experten nicht primär bildlich-anschaulich, sondern als Narrative (Sfard, 2008) zutage traten, die von Anwendungen, Theoremen oder Querbezügen zu anderen mathematischen Diskursen geprägt waren. In Zukunft können die (partiellen) Aspekte z.B. genutzt werden, um Lehr-Lern-Angebote in der Funktionentheorie gezielter an curriculare Gegebenheiten anzupassen. Die herausgearbeiteten diskursiven Vorstellungen der Experten können darüber hinaus als Vergleichshorizonte für Studierendenvorstellungen dienen.

Danksagung

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01JA1912 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.

Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Hanke, E. (2020a). Intuitive mathematical discourse about the complex path integral. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, September, 12–19, 2020)* (pp. 103–112). University of Carthage and INDRUM.

Hanke, E. (2020b). Vorstellungen im intuitiven mathematischen Diskurs. In H.-S. Siller, W. Weigel & J.F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020: 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 385–388). WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-21347

Oehrtman, M., Soto-Johnson, H. & Hancock, B. (2019). Experts' construction of mathematical meaning for derivatives and integrals of complex-valued functions. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education, 5,* 394–423. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00092-7

Roos, A.-K. (2020). *Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule–Universität Verständnisschwierigkeiten von Mathematik an der Hochschule am Beispiel des Extrempunktbegriffs.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29524-0

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944