Rainer KAENDERS, Bonn

# Der Übergang von Empirie zu Phantasie anhand von Größen

Größen kann man als ideative Metaphern für sinnlich in dieser Welt wahrnehmbare Gegenstände auffassen. Diese mentalen Objekte (Freudenthal, 2002, S. 33) leben zwischen der dinglichen Welt und der Mathematik und wirken normierend in zwei Richtungen. Geometrische Größen, wie Länge, Volumen, Winkel, ... und deren denknotwendige Zusammenhänge haben das Phantasiegebilde Mathematik in der heutigen Form, und besonders die reellen Zahlen, erst entstehen lassen. Seit Galileo wirkt die Mathematik auch umgekehrt fruchtbar normierend auf die Beschreibung der Welt mit Gewicht, Zeit, Temperatur, Spannung, Stromstärke, …. Die Betrachtung von Phänomenen, wie Geld, Lebenszeit, Stimmung, Zustimmung, PISA-Score, Lernzuwachs, DAX, Performance-daten, *Sustainability Index* etc. zu Größen allerdings sorgt für Normierungen, die nicht unbedingt Welterkenntnis bedeuten.

## Von den Größen zur Mathematik

Was sind Größen? Hierauf müssen wir eine Antwort schuldig bleiben; sie sind Objekte in einer Zwischenwelt zwischen der gegenständlichen Welt und der Mathematik. In der gegenständlichen Welt können wir Erfahrungen mit ihnen sammeln, doch müssen sie erst idealisiert werden um Gegenstand mathematischer Betrachtungen zu werden. So finden wir zum Beispiel viele Längen in dieser Welt, doch gibt es diese nicht beliebig groß. Um das und vieles andere zu denken, müssen wir sie idealisieren.

Statt zu sagen, was Größen sind, beschreiben wir ihre Eigenschaften. Größen der gleichen Art $a$ und $b$ kann man *vergleichen* ($a < b$, $a = b$ oder $a > b$) *zusammenfügen* $(a + b)$, *wegnehmen*( $a - b$, wenn $a \geq b$). Zum Aufbau der klassischen Mathematik kommen drei weitere Eigenschaften hinzu: *Archimedisches Axiom*, *Existenz der vierten Proportionalen* und *Vollständigkeit*, die aus der Empirie nur schwer zu rechtfertigen sind.

Dies ist keine Axiomatik im modernen Sinne; Größen sind keine mathematischen Objekte. Doch durch die metaphorische Sprache werden Sachverhalte suggeriert: $a + b = b + a$, weil *zusammenfügen* dies nahelegt, $a + b > a$ (Euklid: Das Ganze ist größer als sein Teil.), $(a - b) + b = a$ und $(a + b) + c = a + (b + c)$. Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Zunächst fügen wir das *Archimedische Axiom* hinzu (Euklid Elemente, Buch V, Def. 4): Für je zwei Größen gleicher Art $a$, $b$ soll man stets ein solches Vielfaches $na$ von $a$ finden können, das größer ist als $b$.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
*Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.*
*56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.* WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Beim Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat oder im Pentagon wird das Archimedische Axiom verwandt. Die Atomisten im alten Griechenland, wie Leukippos (im 5. Jhd. v. u. Z.) und Demokrit (460 oder 459–370 v.u.Z.), waren der Auffassung, dass es kleine nicht weiter zu zerteilende Entitäten gebe, so genannte *Atome*. Diese Auffassung ist mit dem Archimedischen Axiom nicht verträglich. Die *hyperreellen Zahlen* in der Nichtstandard-Analysis erfüllen auch das Archimedische Axiom nicht.

Eudoxos von Knidos (~ 408–355) wird die Proportionenlehre zugeschrieben, die Euklid im fünften und sechsten Buch seiner Elemente wiedergibt. In Buch V (Def. 5) von Euklids „Elementen" finden wir die Definition, die zur Grundlage der Proportionenlehre geworden ist. Modern formuliert lautet sie: Seien $\mathsf{A}, \mathsf{B}$ Größen einer Art und $a, b$ Größen einer anderen. $a{:}\,b = A{:}\,B$ gelte, wenn für alle natürlichen Zahlen $p, q$ gilt: $qa > pb \leftrightarrow \mathsf{qA} > \mathsf{pB}$ sowie $qa = pb \leftrightarrow \mathsf{qA} = \mathsf{pB}$ als auch $qa < pb \leftrightarrow \mathsf{qA} < \mathsf{pB}$.

**Normierung durch die Existenz der vierten Proportionalen**

Größen entfalten ihren normativen Charakter für die Naturbeschreibung dadurch, wenn wir Größenverhältnisse von einem Größenbereich auf einen anderen übertragen.

**Existenz der vierten Proportionalen**: Sind $a$, $b$ zwei Größen gleicher Art und ist $c$ eine weitere Größe, evtl. aus einem anderen Größenbereich, dann gebe es eine Größe $x$ aus dem Größenbereich von $c$, sodass $A{:}\,B = x{:}\,c$.

Hiermit können wir jedes Verhältnis zweier gleichartiger Größen durch ein Verhältnis von Größen in jedem anderen Größenbereich ersetzen. Größenbereiche, wie beispielsweise Gewichte, Zeiten oder Geld geben keinen Anlass die geschlossene Welt der rationalen Verhältnisse zu verlassen. Nur die Größenbereiche der Geometrie veranlassen uns dazu, zumindest wenn wir das Phänomen der Inkommensurabilität nicht ignorieren wollen. Die Existenz der vierten Proportionalen ist eine Art *Imperialismus der Geometrie*: die Verhältnisse der Geometrie (zum Beispiel im Pentagon) werden auf alle anderen Größenbereiche der Welt übertragen. Dies begründet die Sonderstellung der Geometrie. In diesem Lichte kann man auch das berühmte Galileo-Zitat lesen.

> *Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt [, ich meine das Universum]. Aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne*

*die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum. Galileo Galilei*

Geometrische Figuren sind die Buchstaben der Sprache des Universums. Denken wir beispielsweise über Gewichte oder Zeiten nach, so wird dies in dem Moment offenbar, wenn wir über deren Messung nachdenken: eine Waage überträgt ein Gewicht auf eine (geometrische) Länge, eine Uhr stellt eine Zeit als Winkel oder als (geometrische) Länge eines Kreisbogens dar. So sind dann plötzlich Größen wie $\sqrt{2}$ kg oder $\pi$ Stunden denkbar. Empirisch gibt es keinerlei Anlass die Existenz solcher unmessbaren Größen anzunehmen. Und auch die Pythagoräer waren der Überlieferung nach der Auffassung, dass der gesamte Kosmos auf dem Verhältnis ganzer Zahlen beruhe und dass dies ein Zeichen von Harmonie sei.

Jedes Größenverhältnis ist charakterisiert durch die rationalen Verhältnisse, die kleiner und die rationalen Verhältnisse, die größer sind. Mit der *Vollständigkeit* drehen wir den Spieß um: wir proklamieren, dass alle diese Charakterisierungen zu Größenverhältnissen gehören sollen. Damit haben wir dann zum einen alle schon in Erscheinung getretenen und zudem alle überhaupt nur möglicherweise noch auftretenden Größenverhältnisse erfasst (Dedekind, 1872).

Jede der drei Forderungen, *Archimedisches Axiom*, *Existenz der vierten Proportionalen* und *Vollständigkeit*, kann auch abgelehnt werden und wir finden in der Mathematikgeschichte ernstzunehmende Strömungen, bei denen das Archimedische Axiom (Anfänge der Infinitesimalrechnung und Nichtstandard-Analysis) und die Existenz der vierten Proportionalen (die Pythagoräer und Atomisten) nicht akzeptiert wurde. Die Vollständigkeit war der Ausgangspunkt der Grundlagenkrise (Weyl, 1919). Mit diesen Größenverhältnissen kann man rechnen: es sind die positiven reellen Zahlen.

## Uneigentliche Verwendung der Größenlehre

Die Behandlung von Phänomenen, wie Reichtum, Lebenszeit, Stimmung, Zustimmung, PISA-Score, Lernzuwachs, DAX, Performance-daten, *Sustainable Development Index* etc. als Größen sorgt für Normierungen der Wirklichkeit, die durch eine nicht gerechtfertigte Ausweitung der Existenz der vierten Proportionalen entstehen. So kann man etwa bezweifeln, ob die Jahre, die man während der Schul- und Ausbildungszeit verbringt, einen genauso langen Zeitraum darstellen wie eine entsprechende Anzahl von Jahren in der Mitte des Lebens. Oder ist es so, dass die auf unwissenschaftlicher Basis (nicht reproduzierbar, weil PISA fortwährend die Bildungssysteme normativ beeinflusst und ohne Offenlegung der Versuchsanordnung) entstandenen PISA-Scores (Test 2018, OECD, 2022) von Indonesien (379 was eigentlich?) und den Niederlanden (519 was eigentlich?) suggerieren, dass die Schüler*innen des europäischen Landes um 37% besser Mathematik verstehen als die Schüler*innen in seiner ehemaligen Kolonie. Was bedeutete es, wenn ein Land 419 erreicht hätte, obwohl es so ein Land nicht gibt?

In einer Likert-Scala, trifft zu (1), trifft eher zu (2), teils-teils (3), trifft eher nicht zu (4), trifft nicht zu (5), ist „trifft eher zu“ nicht das Doppelte von „trifft zu“. Ein Lernzuwachs von 10 gegenüber einem Zuwachs von 20 bedeutet nicht, dass doppelt so viel verstanden wurde (Prömmel, 2013). Geht es der Wirtschaft doppelt so gut, wenn der DAX, wie heute bei etwa 14.000 steht, wie im Herbst 2011, wo er sich unter 6.000 befand? Der *Sustainable Development Index* suggeriert, dass Algerien und Deutschland 1990 ein vergleichbares Verhältnis von Humanentwicklung und ökologischer Nachhaltigkeit hatten, während 2019 Algerien doppelt so weit entwickelt war wie Deutschland. So gibt es noch viele weitere Beispiele von Pseudo-Größen, die einen notwendigen politischen Diskurs verhindern.

## Literatur


Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Vieweg & Sohn.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical Phenomenology of mathematical Structures*. Kluwer Academic Publishers.

Prömmel, A. (2013). Analysen zum Lernzuwachs. In *Das GESIM-Konzept. Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Mathematik und in der Statistik*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00594-8_7

OECD (2022). Mathematics performance (PISA). https://data.oecd.org/pisa/mathematics-performance-pisa.htm

Sustainable Development Index (2022). https://www.sustainabledevelopmentindex.org/

Weyl, H. (1919). Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift*, 10, 39–79.