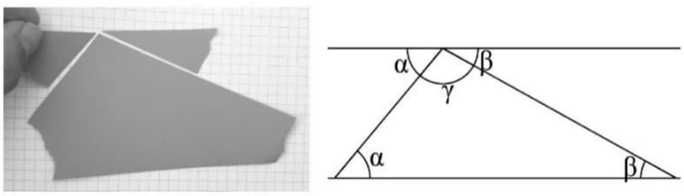
Anselm LAMBERT, Saarbrücken & Jonas LOTZ, Saarbrücken

enaktiv – ikonisch – symbolisch epistemologisch betrachtet und semiotisch präzisiert

Die brunersche Trias der Darstellungs*modi* enaktiv – ikonisch – symbolisch gehört seit etwa einem halben Jahrhundert zum Kanon der Mathematikdidaktik. Ihre Verwendung verspricht erfolgreicheres/nachhaltigeres ergo besseres Lernen: Inhalte werden demgemäß zunächst in einer enaktiven Handlung begriffen, dann in Bildern ikonisch festgehalten und schließlich endlich auch symbolisch, also formal erfasst. Überspitzt: Basteln, malen, rechnen lassen – in dieser Reihenfolge.

Probleme einer verkürzten Sicht

In dieser nicht selten zu findenden, verkürzten Form auf drei (vermeintlich hierarchische) Darstellungs*ebenen* birgt die Trias potentielle Bruchstellen. Als erläuterndes prototypisches Beispiel: Die Winkelsumme im Dreieck. Von einem Dreieck werden drei Ecken abgerissen; legt man diese mit ihren Scheiteln aneinander, dann lässt sich der gestreckte Winkel entdecken, der einer Winkelsumme von 180° entspricht. Bewiesen wird die Aussage dann üblicherweise über die Kongruenz von Wechselwinkeln an Parallelen – die aber kamen in der Handlung gar nicht vor! Verhindern lässt sich dieser Bruch durch konsequentere Beachtung von Kohärenz bei intermodalen Transfers zwischen den Ebenen. Hier konkret: Wir reißen nur *zwei* Ecken ab und legen diese passend an die dritte, so dass die notwendige Parallele entstehen kann, die schließlich den gewünschten *konstruktiv-geometrischen* und *verbal-begrifflichen* Beweis trägt – die symbolische Ebene (s. u.) ist damit erreicht:



Die symbolische Ebene eines verständigen Arbeitens mit mathematischen Zeichen ist also nicht notwendig *formal-algebraisch*. Gerade in der Geometrie spielen häufig – wie hier – andere mathematische *Zeichensysteme/ Sprachformen* eine mindestens ebenso wichtige Rolle. Mit denen können wir offensichtlich auch erfolgreich Mathematik treiben.

Mathematik als symbolische Sprache

Einblick in ältere Literatur hilft – mal wieder. „Schließlich gibt es Repräsentationen in Worten oder Sprache. Ihr Kennzeichen ist ihr symbolischer Charakter […]. Symbole (Wörter) sind […] in ihrer Bedeutung variabel und fast

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

immer sehr ergiebig oder fruchtbar in dem Sinne, daß eine Sprache oder irgendein Symbolsystem Regeln für die Bildung und Umformung von Sätzen hat, welche Sachverhalte umfrisieren können, mehr als dies durch Handlungen oder Bilder mögliche wäre“ (Bruner, 1974, S. 17). „Die syntaktischen Regeln (Grammatik) verleihen einer Sprache einen generativen Charakter: Wer eine Sprache spricht, ist in der Lage, Sätze hervorzubringen und zu verstehen, die vorher niemals geschrieben oder gesprochen wurden“ (Wittmann, 1981, S. 88).

Unter diesem Blick ist es sinnvoll, Mathematik als Sprache zu betrachten. Sprache setzt sich aus Zeichen, Worten, Sätzen zusammen. Welcher Gestalt können diese sein? Wo kommen sie her? Wie nutzen wir sie? Und wie können wir dies – von einer Meta-Ebene aus – beschreiben?

Kodalität und Modalität unterscheiden

Geeignete Meta-Ebenen liefern Linguistik und Semiotik und von dort zunächst die Unterscheidung von *Modalität* (hier: die Darstellungsebenen) und *Kodalität* (hier: die Zeichensysteme/Sprachformen) – (Lambert, 2020).

Modal unterscheiden wir Handlung, Zeichen und Symbol – unter Symbolen verstehen wir dabei Zeichen mit den ihnen eigenen Regeln. Inwieweit eine Darstellung noch ein Zeichen oder schon ein Symbol ist, hängt davon ab, inwieweit die verwendende Person den intendierten latenten Symbolgehalt bereits erfasst hat. In unserem Beispiel wird eine konkrete Handlung *enaktiv* an einem Papierdreieck ausgeführt, deren Ergebnis wird in einem Foto *ikonisch* festgehalten, und nach und nach werden die innewohnenden mathematischen Regeln (wieder-)entdeckt. So wird die *symbolische* Ebene erreicht, auf der eine Antwort auf die Fragestellung hervorgebracht werden kann.

Kodal nehmen wir eine Unterscheidung nach den verwendeten Zeichen, dem jeweiligen *Zeichensystem* vor. Jene ermöglichen durch ihre jeweils potentiellen Symbolgehalte unterschiedliche *Sprachformen*.

Zeichensystem	Formelzeichen	Bilder	Worte
Sprachform	formal-algebraisch (FA)	konstruktiv-geometrisch (KG)	verbal-begrifflich (VB)

In unserem Beispiel tauchen Winkel-Darstellungen aus allen Zeichensystemen auf. Zur Begründung verwenden wir die konstruktiv-geometrische und die verbal-begriffliche Sprachform – im typischen Zusammenspiel. Die Formelzeichen α, β und γ dagegen nutzen wir nur zur Benennung der Winkel. Die formal-algebraische Sprachform der Mathematik ist übrigens mit Abstand die jüngste. Sie ist noch kein halbes Jahrtausend alt. Die klassische griechische Mathematik in der Tradition von Thales, Heron, Euklid und Archimedes ist genuin konstruktiv-geometrisch und verbal-begrifflich. Musste sie sein, denn man hatte schlicht noch gar keine Formelzeichen mit Regeln zur Verfügung – ob diese damals wirklich vermisst wurden?

Objekthafte, entlehnte und kodifizierte Zeichen unterscheiden

Schon ein weiterer Blick auf unsere Winkel offenbart weitere Unterschiede zwischen den dort verwendeten Zeichen, die sich semiotisch fassen lassen. Zunächst haben wir im Papierdreieck ein Realisat von Dreieck vorliegen und in ihm Realisate von Winkeln als *objekthafte Zeichen*, mit denen wir in *effektiv haptisch ausführbaren Handlungen* umgehen können. Dieser Umgang kann *naiv* sein – wir reißen die Ecken ab und legen sie willkürlich (womöglich aber dann sogar passend) hin – oder *verständig* – wir reißen die Ecken ab und legen sie bereits auf einen gestreckten Winkel zielend an und suchen (er-)klärende mathematische Zusammenhänge.

Auf dem Foto und mehr noch in der idealisierten Zeichnung der festgehaltenen Situation sehen wir aus dem Objekt *entlehnte Zeichen*, die nur noch gedankliches Operationspotential haben, um verständigen Umgang zu ermöglichen. Daneben haben wir mit α, β und γ *kodifizierte Zeichen* verwendet, die einer Konvention unter den Nutzenden bedürfen, da sie keinen Ursprung in der betrachteten Situation haben. Die Zeichnung oben rechts ist damit insgesamt (nach ihrer Nutzung zur Begründung der Winkelsumme im Dreieck) ein *Mischzeichen* aus *verständig-entlehnten* und *naiv-kodifizierten* Zeichen.

Die EIS-Palette – ein vertieftes und erweitertes EIS-Prinzip

Insgesamt führen diese semiotisch theoretisch begründeten Überlegungen zu einer Ausdifferenzierung der brunerschen Trias enaktiv – ikonisch – symbolisch mit ihren zwei intermodalen Übergängen in einer EIS-Palette.

<table>
<tr><td>verständig</td><td colspan="3">symbolisch
(verständig-objekthaft) (verständig-entlehnt) (verständig-kodifiziert)</td></tr>
<tr><td>naiv</td><td>enaktiv
(naiv-objekthaft)</td><td colspan="2">ikonisch
(naiv-entlehnt) (naiv-kodifiziert)</td></tr>
<tr><td>Umgang mit den Zeichen / Art der verwendeten Zeichen</td><td>objekthaft</td><td>entlehnt</td><td>kodifiziert</td></tr>
</table>

Dadurch werden *horizontale Übergänge* zwischen den Arten verwendeter Zeichen und *vertikale* zwischen dem möglichen Umgang mit diesen erfassbar. Die Hierarchie der Trias, die dazu verleiten kann, formal-algebraisch symbolische Darstellungen als die höchsten und einzig wertvollen zu betrachten, löst sich auf.

Drei Leitsätze zur EIS-Palette

Die EIS-Palette beschreibt vorkommende Zeichen und Übergänge *deskriptiv*. Sie ist aber auch *normativ* einsetzbar, als Überblick über wünschenswerte Zeichenvielfalt und den möglichen Umgang mit dieser, und schließlich *präskriptiv*, um jene dann auch konkret im Unterricht umsetzen zu können. Dazu lassen sich entlang der EIS-Palette Leitsätze formulieren, zu denen sich in Lotz (2022) zahlreiche konkrete Anwendungsbeispiele finden:

- Leitsatz zur *Verwendung der EIS-Palette*: Mathematiklernen und -treiben ist mit objekthaften, entlehnten und kodifizierten Zeichen möglich.
- Leitsatz zu *horizontalen Übergängen*: Gestalte Zeichen derart, dass Symbolgehalte bestmöglich übertragbar sind.
- Leitsatz zu *vertikalen Übergängen*: Gestalte Zeichen derart, dass die intendierten Symbolgehalte bestmöglich erschließbar sind.

Einbettung in die mathematikdidaktische Theoriebildung

Die semiotisch motivierte EIS-Palette ist kohärent mit bestehenden (mathematik-)didaktischen Theorien anderen Ursprungs. Sie kann als eine vereinheitlichend synthetisierende Theorieweiterentwicklung auch dieser aufgefasst werden: dem (leider in Vergessenheit geratenen) *Isomorphiekriterium* bei BREIDENBACH und dem *operativen Prinzip* nach AEBLI. Beide lassen sich durch die EIS-Palette neu betrachten und verstehen: Bei BREIDENBACH (1956) werden latente Ideen zwischen den Zeilen besser lesbar, und die Einordnung von AEBLIS (1983, S. 238) idealtypischem Lernprozess in die EIS-Palette macht dessen Unterscheidung zwischen *Phasen* und *Stufen* verständig (Lotz, 2022, S. 263).

Umgekehrt liefern beide „Vorläufertheorien" eine weitere Fundierung der EIS-Palette außerhalb der Tradition von enaktiv – ikonisch – symbolisch.

Literatur

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens: Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage*. Klett-Cotta.

Breidenbach, W. (1956). *Rechnen in der Volksschule*. Schroedel.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin-Verlag.

Lambert, A. (2020). Mathematik und/oder Mathe in der Schule – ein Vorschlag zur Unterscheidung. *Der Mathematikunterricht, 66*(2), 3–15.

Lotz, J. (2022). *enaktiv – ikonisch – symbolisch. Eine semiotisch basierte Präzisierung und deren unterrichtspraktische Konkretisierungen* (Dissertation). Universität des Saarlandes (online verfügbar).

Wittmann, E. Ch. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg.