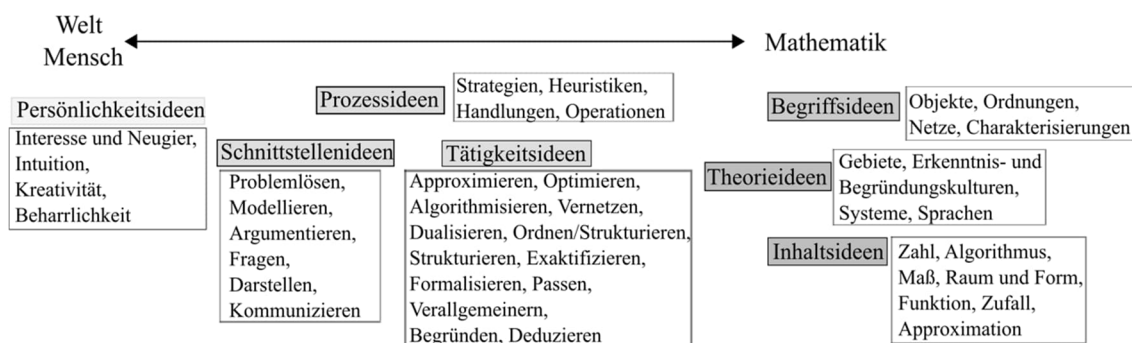


## Fundamentale Ideen der Mathematik im Unterrichtsalltag

### Mathematikdidaktische Theoriebildung Fundamentaler Ideen

Mittlerweile gehören Fundamentale Ideen zu tradierten Inhalten mathematikdidaktischer Theoriebildung und es liegt eine Vielzahl unterschiedlicher Konzeptionen vor, die sowohl im logischen als auch im prototypischen Begriffsverständnis variieren (vgl. Whitehead, Bruner, Fischer, Bender/Schreiber, Schweiger, Vohns u.v.a. – Überblick bei von der Bank, 2016). SCHWEIGER sieht gerade darin eine Chance – für den Unterricht: „Das Finden eines individuellen Katalogs, der auch immer wieder revidiert werden kann, könnte ein lohnender Teil der den Unterricht begleitenden didaktischen Reflexion sein [...]“ (Schweiger, 2010, S. 1). Eine Aufgabe der Fachdidaktik ist also, theoriebasierte Vorschläge zu machen, aus denen Lehrpersonen mit Blick auf den eigenen Unterricht und für die dort agierenden Personen eine stimmige Auswahl treffen können. Ein Weg zur Etablierung einer fachdidaktisch tradierten Theorie im Unterrichtsalltag.

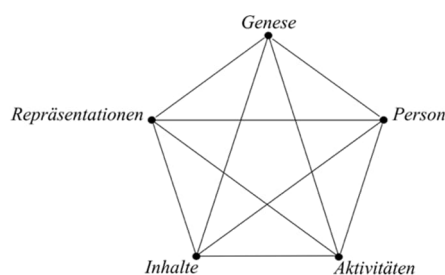
Schweigers (2010) Vorschlag folgend wird nun eine Theorie Fundamentaler Ideen skizziert, die das logische und prototypische Begriffsverständnis zunächst weiter öffnet, damit bisher vorhandenen Lücken schließt und durch ihre Breite Lehrenden Raum zur individuellen Aneignung und Schwerpunktsetzung im Unterricht ermöglicht. Berücksichtigung finden dabei erstmals explizit auch Einstellungen und individuelle Überzeugungen der Mathematiktreibenden. Daher werden hier unter *Fundamentalen Ideen* jene für Mathematik und Mathematiktreiben zentralen Aspekte wie Inhalte, Handlungen aber auch Einstellungen verstanden, deren Zusammenspiel erst das Wesen der Mathematik ausmachen. Dieses erweiterte Begriffsverständnis wirkt sich auf den Ideenkatalog aus, der bereits bestehende Ideenkataloge aus der Forschungstradition integriert, durch die Gliederung in Kategorien stärker strukturiert und durch die Kategorie der Persönlichkeitsideen explizit (positive) Einstellungen zum Forschen berücksichtigt und somit das Spannungsverhältnis *Mensch/Welt – Mathematik* in seiner Breite abdeckt.



Dieses erweiterte Spannungsverhältnis findet sich als didaktisches Dreieck schon bei Schupp (1978). In diesem vermittelt die Mathematik durch Vertiefung und Besinnung in der palintropischen Beziehung zwischen Mensch und Welt (Schupp, 2004). Die hier vorgestellte Theorie Fundamentaler Ideen ermöglicht die Beschreibung weitere Fälle des didaktischen Dreiecks. Der Achtsame Unterricht (Wilhelm, 2021) als weitere Dimension bettet das Dreieck in den Mathematikunterricht ein und erweitert es zum didaktischen Tetraeder, welches erforschenswerte Zusammenhänge aufzeigt (von der Bank, 2023).

### Fundamentale Ideen für den Mathematikunterricht

Die so entstandene Theorie ist für eine direkte unterrichtliche Nutzung noch zu komplex. Sie bedarf einer Reduktion auf ihren unterrichtspragmatischen Kern, bei der die Frage nach den wesentlichen Aspekten und Funktionen Fundamentaler Ideen im Unterricht leitend ist. Ganz im Sinne der Forschungstradition Fundamentaler Ideen sollen diese auch im Mathematikunterricht Vernetzungen ermöglichen u. a. zwischen den Knoten dieses Vernetzungspentagraphen, die sich aus obigen Ideenkategorien herleiten (von der Bank, 2016).



Aus Konkretisierungen der Prozessideen sowie der Zusammenfassung von Schnittstellen- und Tätigkeitsideen entsteht der Knoten *Aktivitäten*.

Der Knoten *Inhalte* umfasst die Inhaltsideen (als Konkretisierung mathematischer Gebiete) sowie inhaltliche Aspekte der Begriffsideen wie Objekte und deren Charakterisierung. Von den Begründungskulturen der Theorieideen gehören Beweise zum Knoten *Inhalte*.

Die Verwendung unterschiedlicher Darstellungsformen von Objekten und Begriffen, aber auch wichtige Aspekte von Begriffsbildung wie die Unterscheidungen zwischen Vorstellung und Darstellung sowie den kognitiven Präferenzen und Darstellungsebenen leiten sich aus den Inhalts- und Begriffsideen ab; sie werden im Knoten *Repräsentation* zusammengefasst.

Um ein angemessenes Bild von Mathematik als Prozess und als Produkt zu vermitteln, sollte an geeigneten Problemen und Lösungen auch auf deren

Genese eingegangen werden. Die oben beschriebenen Einflüsse der Theorieideen auf Begriffs- und Inhaltsideen werden daher im Knoten *Genese* für den Unterricht wirksam gemacht.

Die Persönlichkeitsideen sind im Knoten *Person* aufgehoben.

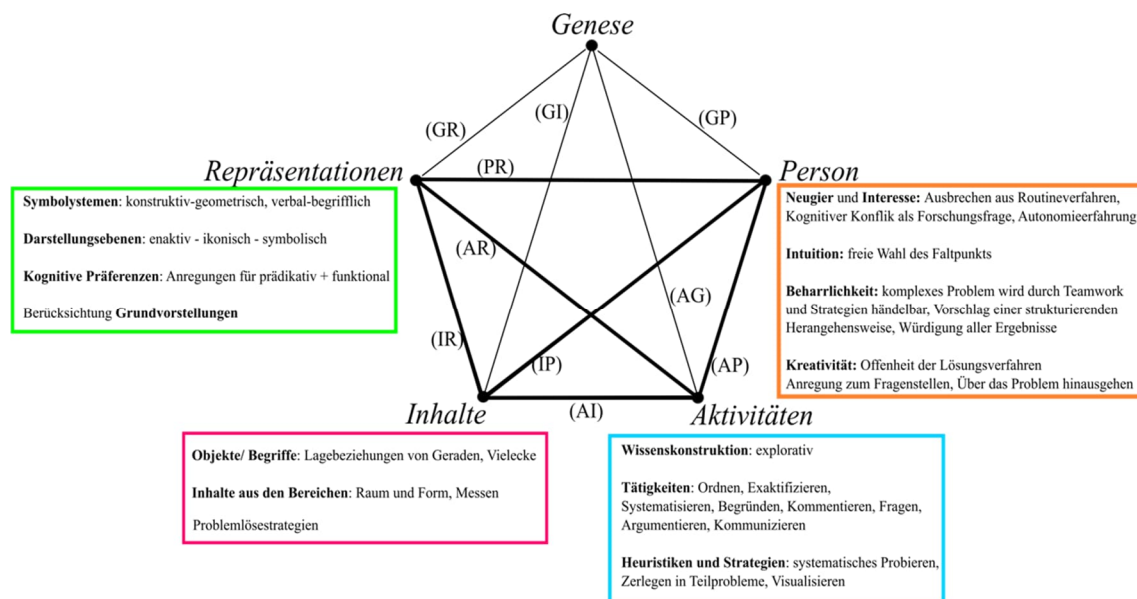
Auch die Kanten des Vernetzungspentagraphen haben inhaltliche Bedeutungen. Sie visualisieren im Unterricht jeweils eine relevante Vernetzung zwischen zwei Knoten. Die Kante GP (siehe Abbildung unten) zeigt beispielsweise an, dass mit historischen Inhalten Interesse und Neugier an Mathematik erzeugt werden kann und somit Aspekte, die die Person der Lernenden betreffen, angesprochen werden können.

### **Fundamentale Ideen nutzen im Unterrichtsalltag**

Der so entstandene Vernetzungspentagraph kann von Lehrpersonen genutzt werden als didaktische Brille zur deskriptiven Analyse von Vernetzungsmöglichkeiten, die beispielsweise in Schulbüchern vorhanden oder ausgelassen sind. Dabei dienen die Knoten dem Erfassen der im Material angesprochenen Fundamentalen Ideen. Die Kanten ergeben sich aus Vernetzungen, die im analysierten Material zwischen den Knoten angeregt werden. Im Unterrichtsalltag haben sich dabei folgende Schritte bewährt: Zunächst findet ein Grobscan über das komplette Thema im Schulbuch statt. Im Fokus steht dabei der Knoten *Inhalte*. Hier werden vor der später folgenden Detailanalyse Ankerpunkte geschaffen und festgehalten. Es gilt, den „roten Faden“ im Schulbuchkapitel zu erkennen. Die anderen Knoten dienen der Orientierung und können den Blick schon hier auf besondere Auffälligkeiten lenken. Danach erfolgt die Detailanalyse mit Fokus auf den einzelnen Knoten. Ausgehend von den Inhalten können nun die im Schulbuch angeregten *Aktivitäten* (Arten der Wissenskonstruktion, inner- und außermathematische Tätigkeiten, Strategien und Heuristiken) und die verwendeten *Repräsentationen* (verwendete Darstellungsformen, Symbolsysteme, kognitive Präferenzen) in den Blick genommen werden. Es folgen die Knoten *Genese* (z. B. historische Lösungsverfahren) und *Person* (Forschungsfragen, die Interesse und Neugier wecken; offene oder/und komplexe Aufgaben, die Raum für Intuition und Kreativität bieten und Beharrlichkeit fordern). Diese Detailanalyse legt für jeden Knoten die im Schulbuch enthaltenen Fundamentalen Ideen offen, welche dann als Basis für die Diskussion der Kanten dienen. Solche deskriptiven Analysen sind anhand verschiedener Schulbücher bei von der Bank (2014; 2016) demonstriert.

Auch normativ kann der Vernetzungspentagraph bei der Unterrichtsplanung von Nutzen sein. Ausgehend von der Analyse des verwendeten Schulbuchs gilt es für Lehrpersonen, einen stimmigen Unterrichtsgang durch ein Thema

zu entwickeln. Dies erfordert die Auswahl und Sequenzierung geeigneter Arbeitsaufträge und ggf. die Konstruktion eigener Lernumgebungen. In von der Bank (2018) wird eine solche Lernumgebung und deren Verlauf im Unterricht zur Einführung in das Themengebiet Geometrie in Klassenstufe 5 beschrieben. Bei der Planung dieser Einführungsstunde wurde der Vernetzungspentagraph zunächst deskriptiv zur Schulbuchanalyse verwendet. Dies legte offen, dass altersgemäß vielfältige Tätigkeiten der Lernenden angeregt sowie konstruktiv-geometrische und verbal-begriffliche Repräsentationen berücksichtigt und ein bewusster Übergang zwischen den Darstellungsebenen angeregt wurde. Diese Punkte galt es auch bei der Einführungsstunde zu berücksichtigen. Darüber hinaus sollte in dieser Stunde auch Lust auf das neue Thema gemacht werden, weswegen der Fokus insbesondere auf Aspekte, welche die Person des Lernenden betreffen, gerichtet wurde (vgl. „gefüllter“ Vernetzungspentagraph unten). Es entstand eine Lernumgebung, die durch die Tätigkeit des Papierfaltens zunächst zu einer überraschenden Beobachtung führt, die Neugier und Interesse der Lernenden weckt und somit eine erklärungsbedürftige Forschungsfrage aufwirft. Somit Bei der Lösungsfindung spielten Intuition und Kreativität eine entscheidende Rolle. Zudem bedurfte dies Ausdauer und Entlastung des Einzelnen durch Teamarbeit, beides Aspekte von Beharrlichkeit.



## Literatur

von der Bank, M.-C. (2023): Freude und weitere nichtkognitive Ziele von Mathematikunterricht. In A. Filler, A. Lambert & M.-C. von der Bank (Hrsg.), *Freude an der Mathematik - Zum Gedenken an Hans Schupp. Vorträge auf der 37. Tagung des GDM Arbeitskreises Geometrie vom 10.-12.9.2021 in Saarbrücken*. Springer.

Die weitere Literatur ist online einsehbar. Link zum Verzeichnis: [https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/Marie/BzMU22\\_Literaturverzeichnis\\_Homepage.pdf](https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/Marie/BzMU22_Literaturverzeichnis_Homepage.pdf)