Martin ABT, Freiburg, Katharina LOIBL, Freiburg,
Timo LEUDERS, Freiburg & Frank REINHOLD, Freiburg

Typische Fehler beim Vergleich zweier Datensätze unter Rückgriff auf Boxplots: Eine Pilotstudie

Einleitung

Der Boxplot ist eine in der deskriptiven Statistik häufig genutzte Darstellungsform mit hohem Informationsgehalt. Gerade wegen seiner kompakten Darstellung deskriptiver Kennwerte eignet er sich gut für einen Vergleich mehrerer Verteilungen (Krüger et al., 2015). Auf der anderen Seite macht ihn gerade diese kompakte Darstellung zu einem komplexen und anspruchsvollen Lerngegenstand (Bakker et al., 2005; Edwards et al., 2017).

Diese Komplexität zeigt sich unter anderem in typischen Fehlvorstellung: So ersetzen einige Schüler*innen die konzeptuelle Idee der Rolle der Fläche im Boxplot *‚Je größer die Fläche der Box, desto geringer die Dichte der mittleren Datenhälfte‘* durch die auf der Basis anderer Darstellungsformen langjährig aufgebaute Vorstellung *‚Je größer die Fläche, desto größer der repräsentierte Stichprobenanteil‘* (Abb. 1).

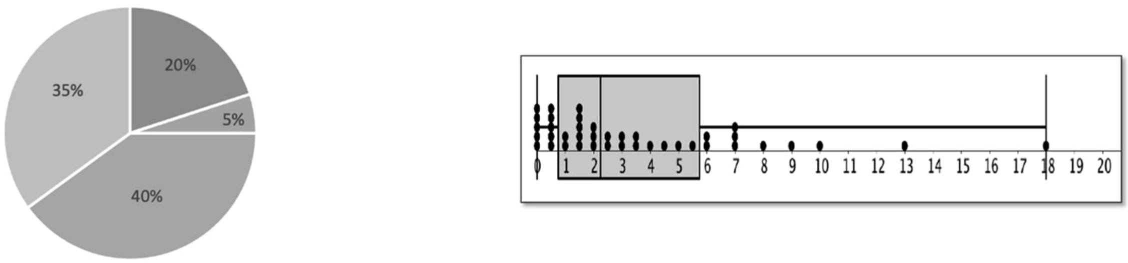

Abb. 1: Im Kreisdiagramm (links) repräsentiert mehr Fläche mehr Stichprobenanteil, im Boxplot (rechts) dagegen eine geringere Stichprobendichte.

Wenn Schüler*innen die Lerngelegenheiten fehlen, um sich von der bekannten Vorstellung *‚Fläche als Anteil‘* zu lösen, bietet die *Conceptual Change*-Theorie (Vosniadou & Skopeliti, 2014) eine plausible Erklärung für diese Flächenfehlvorstellung. Um hierfür geeignete Interventionen gestalten zu können, ist es notwendig, diese Flächenfehlvorstellung diagnostizieren zu können. Dazu können Aufgaben zum Vergleich zweier in Boxplots repräsentierter Datensätze so generiert werden, dass der systematische fehlerhafte Fokus auf die Fläche als ‚Maß des Stichprobenanteils‘ entweder zur korrekten (kongruent) oder zur inkorrekten (inkongruent) Lösung führt (Abb. 2). Tatsächlich konnten Lem et al. (2013) in einer Studie zeigen, dass – entlang der Hypothese – kongruente Items unter Studierenden mit gesichertem deklarativem Wissen zum Boxplot häufiger korrekt gelöst wurden als inkon-

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

gruente. Dies kann als Indikator für das Vorliegen der Flächenfehlvorstellung interpretiert werden. Allerdings lag die Lösungswahrscheinlichkeit für inkongruente Aufgaben in der Studie von Lem et al. (2013) bei rund 63 % – und nicht wie nach der *Conceptual Change*-Theorie angenommen bei 0 %.

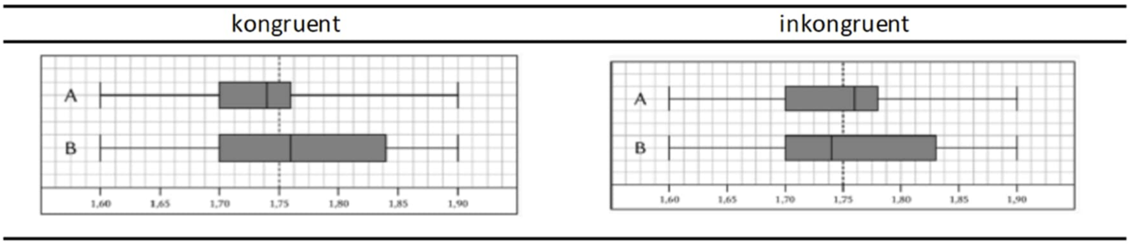

Abb. 2: Zur Flächenfehlvorstellung kongruentes (links) und inkongruentes (rechts) Boxplotpaar zur Aufgabe: „Dargestellt sind die Körpergrößen der Spieler zweier Basketballmannschaften mit gleicher Anzahl von Spielern. Entscheide jeweils, in welcher Mannschaft mehr Spieler größer als 1,75 m sind.“

Die vorliegende Pilotstudie

Eine plausible Erklärung für Lösungsraten über 0 % ist das Vorhandensein von Clustern in einer Stichprobe, die sich darin unterscheiden, ob und in welchem Maß ein Konzeptwechsel vollzogen wurde:

Hyp. 1: Beim Vergleich zweier in Boxplots repräsentierten Datensätzen greifen Studierende auf die Flächenfehlvorstellung zurück. Wir erwarten eine Replikation des bei Lem et al. (2013) gefundenen Effekts der Kongruenz der Items auf die Lösungswahrscheinlichkeit.

Hyp. 2: Während ein Teil der Studierenden den Konzeptwechsel hin zur korrekten Rolle der Fläche in der Boxplotdarstellung vollzogen hat, greifen andere Studierende weiterhin auf die Flächenfehlvorstellung zurück. Wir erwarten, dass wir mittels Clusteranalyse Gruppen von Studierenden identifizieren können, die unterschiedliche Antwortmuster aufweisen: Korrekte Lösung unabhängig von der Kongruenz oder konsequent falsche Beantwortung inkongruenter Items.

Hyp. 3: Ein weiterer Teil der Studierenden hat intermediäres Wissen ausgebildet und nutzt die Flächenfehlvorstellung in bestimmten Situationen: Der Rückgriff auf die Fehlvorstellung ist bei dieser Gruppe mit intermediärem Wissen abhängig davon, ob ein Vergleich der salienten Mediane – oder nur ein Vergleich des weniger salienten ersten bzw. dritten Quartils zielführend ist. Wir erwarten, dass eine solche dritte Gruppe mit intermediärem Wissen inkongruente Item nicht *konsequent* falsch oder richtig beantwortet, sondern in Abhängigkeit von der Salienz der zielführenden Lösungsstrategie.

Methode

An der Erhebung nahmen $n = 38$ Psychologiestudierende der Pädagogischen Hochschule Freiburg freiwillig, anonym und ohne Gratifikationen teil. Die Aufgaben konnten in einer Vorlesungswoche über einen zur Verfügung gestellten Link erreicht und ohne Zeitlimit bearbeitet werden. Im Sinne von Hypothese 3 haben wir die Unterscheidung in kongruente und inkongruente Items aus Lem et al. (2013) in ein 2 x 2-Design erweitert. In einer zweiten Dimension lassen sich die Items nun danach unterscheiden, ob der Median für den Vergleich herangezogen werden kann oder stattdessen andere Quartile zu betrachten waren (Abb. 3). Die Teilnehmer*innen lösten insgesamt zu jedem der vier dargestellten Item-Typen zwei Items. Für alle Studienteilnehmer*innen wurden die Lösungsrate der kongruenten und inkongruenten Items insgesamt und die einzelnen Lösungsraten der vier in Abb. 3 dargestellten Item-Typen berechnet, die als Basis für die Clusteranalyse dienten.

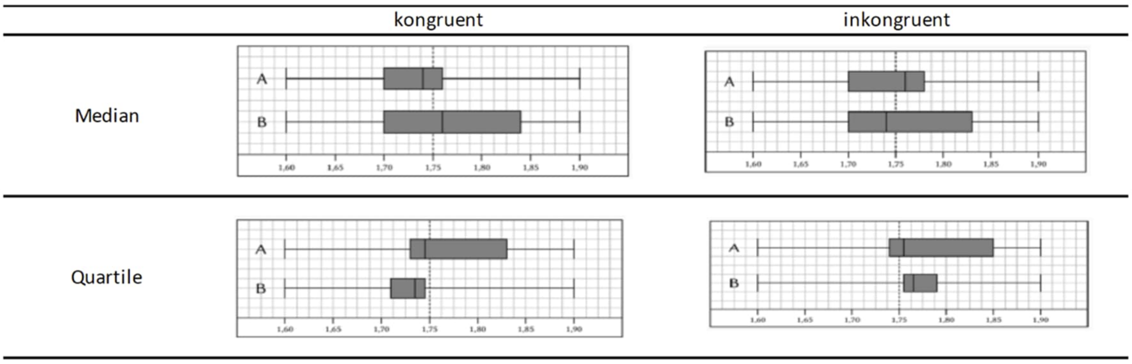

Abb. 3: Zur Flächenfehlvorstellung kongruente (links) und inkongruente (rechts) Boxplotpaare, die entweder durch Vergleich der Mediane (erste Zeile) oder Vergleich des ersten bzw. dritten Quartils (zweite Zeile) zu lösen waren. Aufgabe in Abb. 2.

Ergebnisse & Diskussion

Die Ergebnisse legen nahe, dass die Studierenden unserer Stichprobe auch auf die Flächenfehlvorstellung zurückgriffen. Ein *t*-Test mit gepaarten Werten zeigte einen signifikanten Unterschied der Lösungsraten von kongruenten ($M = 97.4$ %, $SD = 7.8$) und inkongruenten Items ($M = 55.3$ %, $SD = 33.5$), $t(37) = 7.76$, $p < .001$, $d = 1.3$.

Darüber hinaus konnten wir drei Cluster separieren (Abb. 4): Während ein erstes Cluster kongruente Items zuverlässig, inkongruente aber deutlich unter Ratewahrscheinlichkeit beantwortete (grün, $n_1 = 13$, konsequent mit Flächenfehlkonzept), zeigte sich ein zweites Cluster mit hohen Lösungsraten bei allen Items (orange, $n_2 = 13$, unbeeinflusst vom Flächenfehlkonzept). Diese beiden Cluster können mit den in Hypothese 2 vermuteten identifiziert werden. Ein drittes Cluster zeigte nur bei den inkongruenten Items die Flächenfehlvorstellung, die mit einem Vergleich des ersten bzw. dritten Quartils zu beantworten waren; in inkongruenten Items, in denen ein Vergleich des Medians zielführend war, bestätigte sich die Flächenfehlvorstellung dagegen nicht (violett, $n_3 = 12$, intermediäres Wissen im Sinne von Hypothese 3).

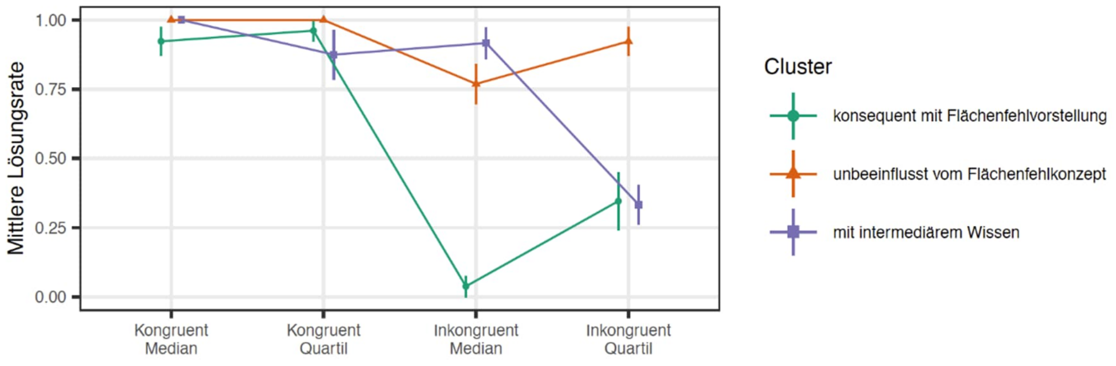

Abb. 4: Ergebnisse der Clusteranalyse nach Ward mit Mittelwerten und 95% KI.

Die Pilotstudie gibt Hinweise auf den Rückgriff auf die Flächenfehlvorstellung – gleichzeitig jedoch auch Hinweise dafür, dass die Studienteilnehmer*innen bei inkongruenten Items nicht geraten (was bei einer Lösungsrate von 55.3 % eine plausible Annahme darstellen würde), sondern in Abhängigkeit von einem vollzogenen oder nicht vollzogenen Konzeptwechsel inkongruente Items konsequent richtig oder konsequent falsch beantwortet haben. Zusätzlich scheint die Salienz der zielführenden Strategie (Vergleich der Mediane vs. Vergleich des ersten bzw. dritten Quartils) einen Einfluss auf das Auftreten des Fehlkonzepts bei einigen Studierenden zu haben. Ob die geringeren Lösungsraten auf das Flächenfehlkonzept oder eine Übergeneralisierung der ‚*Median-Strategie*' zurückführen sind, wird Gegenstand weiterer Untersuchungen sein, die neben einer höheren Teilnehmer*innenzahl auch eine größere Anzahl von Items pro Itemtyp aufweisen werden.

Literatur

Bakker, A., Lem, S. & Konold, C. (2005). Should Young Students Learn About Box Plots?. In G. Burril & M. Camden (Hrsg.), *Curricular development in statistics education* (S. 163–173). International Statistical Institute.

Edwards, T. G., Özgün-Koca, A. & Barr, J. (2017). Interpretations of Boxplots: Helping Middle School Students to Think Outside the Box. *Journal of Statistics Education, 25*(1), 21–28.

Krüger, K., Sikora, C. & Sill, H.-D. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Spektrum.

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). The heuristic interpretation of box plots. *Learning and Instruction, 26*, 22–35.

Vosniadou, S. & Skopeliti, I. (2014). Conceptual Change from the Framework Theory Side of the Fence. *Science & Education, 23*(7), 1427–1445.