

David BEDNORZ, Kiel, Kristin LITTECK, Kiel,
Daniel SOMMERHOFF, Kiel & Aiso HEINZE, Kiel

Erfassung individueller Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff in einer digitalen Lernumgebung

Ein zentraler Gegenstand der mathematikdidaktischen Forschung ist die Untersuchung, wie Schüler*innen mathematische Begriffe im Verlauf einer Unterrichtssequenz entwickeln (Duncan & Hmelo-Silver, 2009). Für die Analyse derartiger Lernverläufe (Lerntrajektorien), vor dem Hintergrund einer theoretischen, idealisierten Lernprogression der Begriffsentwicklung, wird eine kontinuierliche Erfassung der Lernprozesse benötigt. Das Projekt ALICE (Analyzing Learning for Individualized Competence Development in Mathematics and Science Education) adressiert solche Fragestellungen domänenspezifischer Begriffsentwicklungen. Dafür werden in Physik (Energie), Biologie (Evolution), Chemie (chemische Reaktionen) und Mathematik (Ableitung) Unterrichtseinheiten über 20 Stunden in einer digitalen Lernumgebung konzipiert und die Begriffsentwicklung der Schüler*innen evaluiert.

Lernprogression

Nach Smith et al. (2006) werden Lernprogressionen als Verläufe der Begriffsentwicklung mit der allmählichen Erweiterung des (mathematischen) Wissens in einem spezifischen Inhaltsbereich definiert. Im Gegensatz zu individuellen Lerntrajektorien von Schüler*innen handelt es sich um theoriebasierte, ideale Verläufe der Begriffsentwicklung. Lernprogressionen lassen sich durch unterschiedliche Zwischenstufen der sukzessiven Begriffsentwicklung darstellen (Sfard, 1991), beginnend mit dem notwendigen Vorwissen als unterem Wissensanker, über mittlere Stufen der Begriffsentwicklung, bis zum Erreichen des oberen Wissensankers als das Resultat der Lernprogression (Sfard, 1991).

Eine theoretische Konzeptualisierung der Begriffsentwicklung bietet der Prozess-Objekt-Ansatz, der von der Dualität mathematischer Begriffe ausgeht (Sfard, 1991). Sfard (1991) unterscheidet hierbei ein operationales Begriffsverständnis als Prozess (z.B. die Berechnung der mittleren Änderungsrate für einen Abschnitt einer Funktion) und ein strukturelles Begriffsverständnis als Objekt (z.B. für den Vergleich der mittleren Änderungsraten von zwei Abschnitten einer Funktion). Weiterführend differenziert Sfard (1991) drei Phasen der Begriffsentwicklung. Die erste Phase ist die Verinnerlichung des Prozesses (*interiorization*). In der zweiten Phase, der Verdichtung (*condensation*), wird sich allmählich von der konkreten Handlung gelöst und somit zusätzlich zum Prozess der Begriff als Ganzes betrachtet. In der dritten Phase der Verdinglichung (*reification*) kann ein mathematischer Begriff als

Objekt betrachtet werden. Diese idealtypischen Phasen verlaufen für die Begriffe, die erworben werden sollen, in einem hierarchischen Prozess. Neben der theoretischen Beschreibung der Begriffsentwicklung konnte die Studie von Pantziara & Philippou (2012) zeigen, dass sich im Bereich des Bruchzahlbegriffs, die drei Phasen der Begriffsentwicklung empirisch abbilden lassen. Für weitere Inhaltsbereiche ist jedoch weitgehend unklar, wie sich die Entwicklung von Begriffen, insbesondere im unterrichtlichen Kontext, gemäß des Prozess-Objekt-Ansatzes charakterisieren lassen. Das liegt nicht zuletzt an der Schwierigkeit Daten, insbesondere quantitativer Natur für eine Vielzahl an Schüler*innen, während des Unterrichts und des Lernprozesses zu erheben.

Eine Möglichkeit, die Lernprozesse von Schüler*innen kontinuierlich zu erfassen, ist die Bearbeitung von Lernaktivitäten in einer digitalen Lernumgebung. Bei der Bearbeitung fallen viele Prozessdaten an, die auch für eine hohe Anzahl an Schüler*innen automatisiert erhoben und ausgewertet werden können (vgl. Forschungsbereich Learning Analytics). Die Herausforderung im Umgang mit diesen Daten ist es zu evaluieren, welche Rückschlüsse von den Daten auf die Begriffsentwicklung und die Lerntrajektorien gezogen werden können, um diese zu rekonstruieren (Teig et al., 2020).

Lernprogression des Ableitungsbegriffs

Der Ableitungsbegriff kann unter verschiedenen Facetten betrachtet werden (Greefrath et al., 2016): Im Schulunterricht dominiert die Erarbeitung des Ableitungsbegriffs beginnend vom Differenzenquotienten mit der Betrachtung der mittleren (bzw. durchschnittlichen) Änderungsrate und der Betrachtung der Änderung einer Funktion in einzelnen Abschnitten (Intervallen). Anschließend erfolgt die Herleitung der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten und die Betrachtung der momentanen (bzw. lokalen) Änderungsrate für eine Stelle der Funktion und die Einführung des Differentialquotienten. Weiterführend wird das Änderungsverhalten einer Ausgangsfunktion betrachtet. Hier steht nicht mehr nur die Ableitung an einer Stelle im Fokus, sondern an beliebig vielen Stellen, wodurch die Ableitung als Funktion motiviert wird, welche jeder Stelle einer Funktion ihre Ableitung zuordnet. Damit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Ausgangs- und Ableitungsfunktion. Zur Einführung des Ableitungsbegriffs sind entsprechend drei Unterbegriffe zentral: der Differenzenquotient, der Differentialquotient und die Ableitungsfunktion, die in Studien zur Erarbeitung des Ableitungsbegriffs betrachtet wurden (u.a. vom Hofe, 1998; Zandieh, 1997). Unter Rückbezug auf den Prozess-Objekt-Ansatz (Sfard, 1991), lässt sich folgende idealtypische Lernprogression für den Ableitungsbegriff herleiten (siehe Abb. 1).

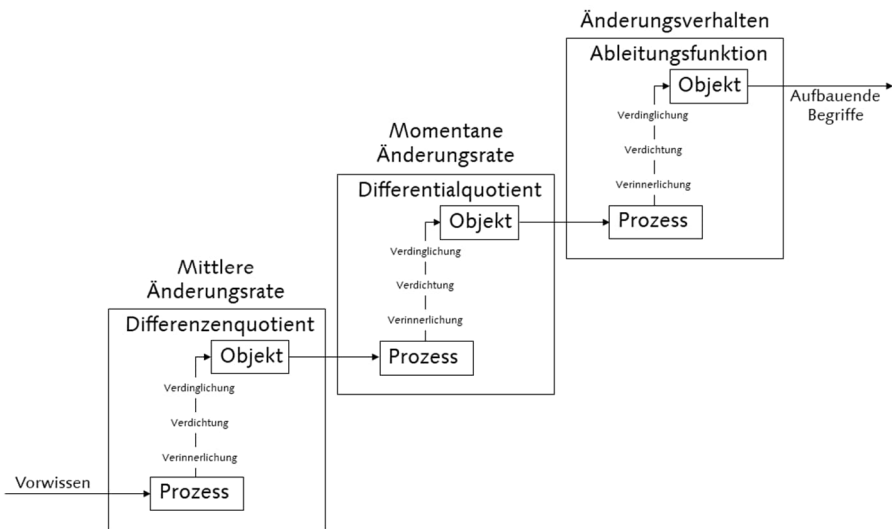


Abb. 9: Lernprogression zum Ableitungsbegriff mit drei unterschiedlichen Stufen der Begriffsentwicklung.

Ziele und Vorgehen

Das Ziel des ALICE Projekts ist es individuelle Lerntrajektorien von Schüler*innen zum Ableitungsbegriff zu identifizieren und analysieren. Im Projekt sollen folgende Forschungsfragen beantwortet werden:

- Wie entwickeln sich die individuellen Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff der Schüler*innen im Verlauf der Unterrichtseinheit?
- Welche individuellen Voraussetzungen beeinflussen die individuellen Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff der Schüler*innen im Verlauf der Unterrichtseinheit?
- Spiegeln die individuellen Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff der Schüler*innen die von Sfard angenommenen Prozess-Objekt-Beziehungen wider? Welche Abweichungen gibt es?

Zur Beantwortung der Fragen wird eine digitale Lernumgebung zum Ableitungsbegriff entwickelt. Die Unterrichtseinheit besteht aus 20 Unterrichtsstunden und ist entsprechend der theoretischen Lernprogression in Abbildung 1 entwickelt worden. Die Lernumgebung beinhaltet dabei unterschiedliche digitale Lernaktivitäten (H5P, Erklärvideos, Geogebra etc.). Die gesamte Unterrichtseinheit wird in drei Lektionen aufgeteilt, die in sich geschlossene Sinneinheiten (mittlere Änderungsrate, momentane Änderungsrate, Änderungsverhalten) darstellen. Die Lektionen untergliedern sich wiederum in Unterrichtsschulstunden, welche die Inhalte der Sinneinheiten strukturiert und aufeinander aufbauend behandeln.

Zur Erfassung der Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff werden während der Interaktion der Schüler*innen mit der digitalen Lernumgebung Prozessdaten erhoben. Das betrifft die Eingabe von Lösungen in geschlossenen und offenen Antwortformaten, Mausbewegungen und Mausklicks, Tastatureingabe-Verhalten, Video-Nutzung, etc. Neben der Erfassung der Prozesse während der Bearbeitung in der digitalen Lernumgebung werden zusätzliche Erhebungsformate eingesetzt, beispielweise im Anschluss an die Unterrichtsstunden. Darüber hinaus findet vor bzw. nach der Unterrichtseinheit ein domänenspezifischer Wissenstest statt. Neben domänenspezifischen Tests werden weitere Instrumente zur Erfassung kognitiver und motivationaler Konstrukte eingesetzt.

Mit den Ergebnissen aus dem ALICE Projekt soll quantitative Evidenz für die Entwicklung des Ableitungsbegriffs im unterrichtlichen Kontext generiert und Kenntnisse über individuelle Lerntrajektorien zum Ableitungsbegriff gefolgert werden. Darauf aufbauend können die Ergebnisse sowohl für die Weiterentwicklung der Gestaltung von (digitalen) Lernmaterialien und -umgebungen als auch für eine Adaptionsgrundlage der Instruktionen zur individuellen Förderung der Begriffsentwicklung genutzt werden.

Literatur

- Duncan, R. G., & Hmelo-Silver, C. E. (2009). Learning progressions: Aligning curriculum, instruction, and assessment. *Journal of Research in Science Teaching*, 46(6), 606–609.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum.
- Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' „conception“ of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 61–83.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Smith, C. L., Wiser, M., Anderson, C. W. & Krajcik, J. (2006). Implications of research on children's learning for standards and assessment: A proposed learning progression for matter and the atomic-molecular theory. *Measurement: Interdisciplinary Research & Perspective*, 4(1/2), 1–98.
- Teig, N., Scherer, R., & Kjærnsli, M. (2020). Identifying patterns of students' performance on simulated inquiry tasks using PISA 2015 log-file data. *Journal of Research in Science Teaching*, 57(9), 1400–1429.
- vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse: Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(4), 257–291.
- Zandieh, M. J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. <http://ir.library.oregonstate.edu/xmlui/handle/1957/11341>