Roland BENDER, Braunschweig &
Mathias HATTERMANN, Braunschweig

Hochschulmathematik in der gymnasialen Oberstufe am Thema "Grenzwert" kennenlernen

Einleitung

Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik stellt viele Studierende vor eine große Herausforderung. Als Ursachen für die Probleme erweisen sich u. a. – neben einem intensiven Umgang mit sehr abstrakten Inhalten wie bspw. dem Grenzwert – eine neue Sichtweise auf die Mathematik als eine deduktiv geordnete Welt, der damit veränderte Fokus vom Anwenden des gelernten Wissens hin zum Begründen, Argumentieren und Beweisen sowie die formalen Anforderungen, wie das Arbeiten mit neuen Symbolen oder der vermehrte Gebrauch von Variablen und Indizes (Brunner, 2014; Ableitinger, 2012; Kempen, 2018). Obgleich zur Milderung der Übergangsschwierigkeiten von der Schule zur Hochschule bereits diverse Konzepte erarbeitetet und getestet wurden, bleibt die Problematik weiterhin virulent (s. z. B. Hefendehl-Hebeker & Bauer, 2019). Während viele Konzepte hauptsächlich an der Universität angesiedelt sind, setzt das hier vorgestellte Promotionsprojekt an der Schule an, um die „Kluft“ zwischen Schule und Hochschule zu reduzieren. Im Rahmen dieses Beitrags wird über den Aufbau des für den Übergang konzipierten Schulkurses sowie über eine Auswahl von Ergebnissen der Interviewstudie berichtet, die im Anschluss an den Kurs mit den Schülerinnen und Schülern durchgeführt wurde. Dabei befasst sich der Beitrag insbesondere mit den Vorstellungen, die die Lernenden zum Grenzwertbegriff im Laufe der Intervention entwickelt haben.

Methoden & Aufbau des Kurses

Grundsätzlich orientiert sich die Untersuchung an der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Design Research): Der Lerngegenstand wurde zunächst auf Grundlage des fachlichen und fachdidaktischen Hintergrunds spezifiziert und strukturiert. Als Produkte entstanden ein konkretes exemplarisch erprobtes Lehr-Lern-Arrangement sowie eine Theorie zu typischen Verläufen, Hürden und Wirkungsweisen des gegenstandsspezifischen Lehr-Lern-Prozesses. Die Umsetzung des Konzepts erfolgte im Rahmen eines sog. schuljahrbegleitenden Projektkurses an einem Paderborner Gymnasium in der elften Jahrgangsstufe mit 19 Schülerinnen und Schülern. In den wöchentlich abwechselnden zwei bzw. vier Unterrichtsstunden beschäftigten sich die Lernenden mit den o. g. Problemfeldern (Arbeitsweisen, Symbolsprache, Grenzwerte). Der Kurs basierte auf einem selbst entwickelten Skript, das für

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

die Lernenden zur Verfügung stand und wöchentlich aktualisiert wurde. Der Unterricht fand allerdings nicht in Form einer klassischen Vorlesung statt, sondern wurde als schüler- und handlungsorientierter Unterricht gestaltet. Dazu wurden die Inhalte in Form von Power-Point-Präsentationen, Arbeitsblättern und GeoGebra-Dateien veranschaulicht und den Lernenden zugänglich gemacht. Der Kurs lässt sich in zwei Blöcke unterteilen:

Der erste Block orientiert sich an der Hochschulveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ (Biehler und Kempen, 2013) für Erstsemesterstudierende des Lehramts für die Sekundarstufe I in Paderborn und stellt insbesondere grundlegende Arbeitsweisen der Mathematik ins Zentrum (Beweisen, Umgang mit Definitionen & Sätzen, deduktives Arbeiten). Im zweiten Block wird das Thema „Folgen und Grenzwerte“ behandelt, um den Schülerinnen und Schülern zusätzlich einen *inhaltlichen* Einblick in die Hochschulmathematik zu ermöglichen. Während des gesamten Kurses wird schrittweise ein (Symbol-)Sprachgerüst aufgebaut und der Umgang mit Indizes, Variablen, etc. intensiv gefördert.

Nach der Durchführung des Schulkurses wurden die im Unterricht entstandenen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler mithilfe von nicht-standardisierten Leitfadeninterviews erhoben und analysiert. Die aktuell laufende Auswertung der Interviews findet in Anlehnung an Kuckartz‘ qualitativer Inhaltsanalyse (2018) statt und fokussiert das grundlegende Beweisverständnis und das (Symbol-)Sprachgerüst, das die Befragten während des Kurses aufgebaut haben sowie die Grund- und Fehlvorstellungen (GVen & FVen), die sie zum Grenzwertbegriff entwickelten (s. Greefrath et al., 2016, S. 17 ff.). Dieser Beitrag beschränkt sich auf ausgewählte Ergebnisse der folgenden Forschungsfrage: „*Was verstehen die Befragten unter ‚Folgenkonvergenz‘?*“. Dazu wurden die Äußerungen der Schülerinnen und Schüler insbesondere in Hinblick auf zwei aus der Literatur (ebd., S. 104 ff.) bekannte GVen – der Annäherungsvorstellung („Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert“ (ebd.)) sowie der Umgebungsvorstellung („Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung“ (ebd.)) – untersucht. In diesem Zusammenhang wurden verschiedene Unterkategorien aus der Literatur abgeleitet bzw. induktiv entwickelt und Äußerungen, die von den normativen Formulierungen abwichen, diesen zugeordnet. Die Unterkategorien umfassen bspw. ungenaue Formulierungen wie „eine konvergente Folge kommt dem Grenzwert *immer* näher“ (Unterkategorie zur Annäherungsvorstellung (AV)) oder „der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert ist im Unendlichen gleich Null“ (Unterkategorie zur Umgebungsvorstellung (UV)). Zudem wurde in der Untersuchung zwischen

Äußerungen unterschieden, die in den Interviews *vor* bzw. *nach* der Besprechung der formalen Definition der Folgenkonvergenz (s. Abb. 1) geäußert wurden, da sie sich in ihrer Qualität deutlich unterschieden.

$$\exists g \in \mathbb{R}: \forall \epsilon > 0 \; \exists \, N \in \mathbb{N}: \forall \, n > N: |a_n - g| < \epsilon$$

Abb. 5: Formale Definition der Folgenkonvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Ergebnisse

Sämtliche hier vorgestellten Ergebnisse basieren auf der o. g. qualitativen Untersuchung. Daher ist eine direkte Verallgemeinerung der Ergebnisse nicht ohne Weiteres möglich. Im Sinne der Entwicklungsforschung dienen die Ergebnisse vorerst der Optimierung des entwickelten Lehr-Lern-Arrangement. Grundsätzlich konnte in den Interviews festgestellt werden, dass die Schülerinnen und Schüler, die regelmäßig die Hausaufgaben bearbeitet und abgegeben haben sowie sich aktiv am Unterricht beteiligten, tragfähige Vorstellungen zu Folgengrenzwerten entwickeln konnten. Dabei war bei den meisten Interviewten die UV, insbesondere in Form der formalen Epsilon-Definition, am stärksten ausgeprägt (bei 18 von 19 Befragten). Zwar verwendete die Mehrzahl der Lernenden (14) zur ersten Beschreibung einer konvergenten Folge auch die Formulierung „beliebig annähern", was offensichtlich auf die AV schließen lässt, erläuterten diese allerdings fast alle (13) im Laufe des Interviews mithilfe von Umgebungen mit Bezug zur formalen Epsilon-Definition: „Ab einer Folgennummer müssen sich alle weiteren Folgenglieder im Epsilonschlauch befinden". Sämtliche Erklärungsansätze hingegen (3), in denen versucht wurde, ausschließlich mithilfe der Annäherung zu argumentieren, mündeten in der ungenauen (und eigentlich falschen) Formulierung, eine konvergente Folge käme dem Grenzwert „immer näher". Ähnliche fehlerhafte Formulierungen traten allerdings auch im Rahmen der UV bei fast allen auf (16). Diese ungenauen Formulierungen scheinen sich also unabhängig von der vorherrschenden Vorstellung (AV oder UV) auszuprägen. Sobald die Befragten sich allerdings konkret der Erklärungen der Symbole der formalen Definition widmeten, konnten die fehlerhaften Formulierungen nur bei zwei Interviewten beobachtet werden. Die Formulierungen wurden zwar im Laufe der Interviews dennoch an manchen Stellen benutzt, bis auf fünf Befragte konnten jedoch alle eine im Interview vorgelegte konvergente Folge, deren Abstand zum Grenzwert mit Erhöhung der Folgennummer nicht monoton ist, korrekt als konvergent beurteilen.

Einige Interviewte sprachen sich dabei sogar trotz anfänglicher Formulierungsfehler bewusst dafür aus, dass *nicht* jedes Folgenglied *immer näher* zum Grenzwert kommen muss, und erklärten weiterhin, dass die bisherige

Verwendung dieser Ausdrucksweise eher global als ein „insgesamt immer Näherkommen“ verstanden wurde. Ausschließlich die Lernenden, die bereits Schwierigkeiten hatten, die formale Definition selbstständig zu formulieren bzw. die Symbole zu erläutern, waren nicht in der Lage die o. g. Folge korrekt als konvergent zu beurteilen. Das Formulieren der formalen Definition scheint also für die Lernenden ein entscheidender Schritt zu sein, sich von den „intuitiven“ (falschen) Formulierungen zu lösen und somit eine korrekte Überprüfung von Folgen auf Konvergenz zu ermöglichen.

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die AV eher intuitiv als erste Stütze bei der Beurteilung einer Folge auf Konvergenz fungierte. Bei einer konkreten Betrachtung von Beispielfolgen rückte die UV dann in den Vordergrund. Die Häufigkeit ungenauer Formulierungen nahm deutlich ab, nachdem die Lernenden sich mit der formalen Definition der Folgenkonvergenz in den Interviews auseinandergesetzt hatten. Diejenigen Befragten, die nicht in der Lage waren selbstständig die formale Definition wiederzugeben bzw. diese zu erläutern, konnten sich auch im Laufe des Interviews nicht von den fehlerhaften Formulierungen lösen und beurteilten dementsprechend „untypische“ konvergente Folgen fälschlicherweise als divergent. Im Schulkurs wurde bereits ein starker Fokus auf die Formulierung sowie auf die Erläuterungen der Definition der Folgenkonvergenz gelegt. Dieser sollte aufgrund der Beobachtungen unbedingt beibehalten werden. Welchen Einfluss die Fähigkeit, die Definition von Konvergenz selbstständig zu formulieren und in eigene Worte zu übersetzen, auf konkrete Begründungen sowie auf das Führen formaler Konvergenzbeweise hat, wird sich in den kommenden Analysen zeigen.

Literatur

Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung.* Springer Spektrum.

Bauer, T. & Hefendehl-Hebeker, L. (2019). *Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien*. Springer Spektrum.

Biehler, R. & Kempen, L. (2013). Vorlesungsskript zu der Veranstaltung *Einführung in die Kultur der Mathematik* an der Universität Paderborn.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Mathematik im Fokus.* Springer.

Kempen, L. (2018). Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. *Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Mathematik und in der Statistik.* Springer Fachmedien.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* Beltz Juventa.