

Vera LANDGRAF, Bamberg

## **Einblicke in die qualitative Analyse des Projekts schauMal**

Im Forschungsprojekt schauMal wird anschauliches Beweisen im Mathematikunterricht der Grundschule thematisiert. Diese Beweise nutzen Handlungen, bei denen sichtbar wird, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und somit allgemeingültig sind (Wittmann, 2014). Sie eröffnen Kindern einen sinnvollen Zugang zum Beweisen und die Option auf Nachweis der Allgemeingültigkeit (Schifter, 2009). Darstellungen als Darstellungsmittel fungieren somit als *Mittler* zwischen Vorstellungen und den betrachteten, abstrakten Strukturen und nehmen die Funktion von Argumentations- und Beweismitteln ein (Schulz, 2014). Sie verdeutlichen Regelmäßigkeiten, über die und durch die die Kinder kommunizieren können, auch wenn sie noch nicht über die Sprache der Algebra verfügen (Dreyfus et. al., 2012; Krauthausen & Scherer, 2007).

Die Grundidee des Projekts ist die Förderung von anschaulicher Beweisfähigkeit durch den Einsatz von Darstellungsmitteln im Unterricht. Dafür werden fachlich und fachdidaktisch fundierte Unterrichtseinheiten zum anschaulichen Beweisen von Teilbarkeiten entwickelt, in einer Intervention implementiert und anschließend evaluiert. Begleitend zur Intervention werden Interviews mit insgesamt zwölf Kindern durchgeführt, die qualitativ analysiert werden. Die Erprobung anschaulicher Beweise wird im Inhaltsbereich Teilbarkeit von natürlichen Zahlen realisiert. Die Teilbarkeitsrelation kann mithilfe von Rechtecksdarstellungen anschaulich gemacht werden, wodurch das Darstellungsmittel eine für Kinder zugängliche Sprache und damit Potenzial, Argumentations- und Beweismittel zu werden, bietet (Landgraf, 2020).

### **Forschungsfrage und Methode**

Die qualitative Analyse betrachtet die Argumentationen und mögliche Verallgemeinerungsversuche der teilnehmenden Kinder sowie die verbalisierten Sichtweisen auf ihr eigenes Darstellungsmittel unter der Forschungsfrage:

*Welche Argumentationen nutzen die teilnehmenden Kinder bei der Bearbeitung der eingesetzten anschaulichen Beweisaufgaben?*

Das Interview nimmt die im Projektunterricht von den Kindern selbst erstellten Bearbeitungen und Darstellungsmittel zum Gesprächsanlass. Es ist somit als Selbstreflexion des erinnerten, eigenen Denkens (zum Zeitpunkt der Bearbeitung) organisiert (Konrad, 2010). Somit sind ggf. auch Denkweisen, die erst in der bzw. durch die Reflexion auftreten, Gegenstand der Analyse. Der qualitativen Analyse stehen ca. 10h Videomaterial von den zwölf interviewten Kindern zur Verfügung. Die qualitative Inhaltsanalyse (Mayring, 2015)

der Interviews ermöglicht es, Denkwege und gegebenenfalls Änderungen in den Denk- und Argumentationsprozessen der Kinder nachzuspüren und Kategorien (je kursiv in Ergebnissen gekennzeichnet) zu entwickeln. Insbesondere wird beachtet, ob und welche Begriffe von den Kindern für Argumentationen genutzt werden sowie die Rolle und Nutzung der Darstellungsmittel. Falls vorliegend werden auch Einblicke in Verallgemeinerungsversuche möglich.

Folgende drei Argumentationsanlässe werden bei der qualitativen Analyse der Begleitinterviews berücksichtigt:

- Die *aus dem individuellen Herstellungsprozess* eigener Darstellungen im Projektunterricht *ableitbaren Argumente*,
- die im Reflexionsgespräch *verbalisierten Argumente* und Gesten und
- die *schriftlichen Argumente* der auf dem Arbeitsblatt erwarteten Begründung (Ergänzung des Halbsatzes ‚Das ist immer so, weil ...‘).

Die jeweiligen Bearbeitungen strukturgleicher Aufgaben aus Pre- und Posttest rahmen die Analyse zusätzlich.

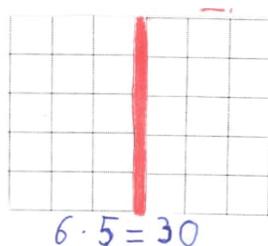
### **Exemplarische Ergebnisse: Beispiel ‚Miriam‘**

Von Miriam liegen ihre Testdokumente, ihre Bearbeitungen der Lernumgebungen aus der Intervention (Gruppe Material / Durchführung durch Klassenlehrkraft, Landgraf, 2019) sowie ungefähr 52 min Videomaterial und die entsprechenden Transkripte der Interviews vor. In dem in diesem Beitrag exemplarisch besprochenen Interviewausschnitt reflektiert Miriam ihre im Projektunterricht selbst erstellte Bearbeitung zur Teilbarkeit von Produkten.

Im *Pretest* nutzt Miriam bei der Aufgabe zur Teilbarkeit durch 2 der Produkte  $2 \cdot 3$ ;  $4 \cdot 5$ ;  $6 \cdot 7$ , eine Rechtecksdarstellung ( $2 \cdot 5$  Punkte), die sie durch zwei Strichmännchen ergänzt. Möglicherweise deutet sie damit an, die Punkte auf zwei Personen zu verteilen, d. h. sie verwendet ggf. das *Verteilargument* als eine Grundvorstellung der Division. Als Argument verschriftlicht sie, dass die Ergebnisse in der Zweierreihe sind. Sie argumentiert hier also über *Faktenwissen zur Ergebnisfolge*.

Im *Posttest* verwendet Miriam bei der strukturgleichen multiplikativen Aufgabe zur Teilbarkeit durch 2 ebenfalls eine Rechtecksdarstellung, jeweils mit 2er-Seitenlänge in der Vertikalen. Sie greift die Darstellung im verschriftlichten Argument auf und verweist darauf, dass es ein Rechteck ergibt. Dass sie die Darstellung explizit zur Begründung aufgreift, ist ein Indiz dafür, dass die Beweisidee der Deutung von Rechtecken für die Teilerrelation bereits teilweise vorhanden ist. Diese Argumentation wird in die gleichnamige Kategorie *teilweise* eingeordnet.

Im Interviewausschnitt reflektiert Miriam ihre Bearbeitung aus dem Projektunterricht zur Teilbarkeit durch 3 der Produkte:  $3 \cdot 2$ ;  $6 \cdot 5$ ;  $9 \cdot 8$ .



**Abb. 1** Miriams Darstellung zu Aufgabe 6·5

1. Bei der *Herstellung der Darstellung* geht Miriam folgendermaßen vor: Zunächst schneidet sie aus vorliegendem Kästchenpapier ein  $5 \cdot 6$  Rechteck aus und unterteilt dieses dann in zwei gleich große  $5 \cdot 3$  Rechtecke, die sie mit etwas Abstand nebeneinander aufklebt. Diese Unterteilung markiert sie mit einem roten Strich (Abb. 1). So verfährt sie bei allen drei multiplikativen Aufgaben. Der Herstellungsprozess deutet somit auf den ersten Blick erneut auf ein Verteilargument hin. Miriam teilt dieses Rechteck jedoch nicht in drei Teile, wie es beim Verteilen bei Teilbarkeit durch 3 notwendig wäre, sondern in zwei Teile. Durch den roten Strich wird die Seitenlänge 6 zu zwei Längen der Länge 3. Im Herstellungsprozess des Darstellungsmittels wird somit ein *Längenargument* (Landgraf, 2020) erkennbar.

2. *Verbalisierte Argumente*: Auf die Interviewfrage, wo die Teilbarkeit durch 3 in ihrer Darstellung zu sehen ist, zeigt Miriam diese zunächst durch einzelnes Tippen in die Kästchen der ersten Zeile des  $5 \cdot 6$  Rechtecks (Abb. 1). Sie weist explizit darauf hin, dass es immer drei Balken sind, weshalb vermutet werden kann, dass sie je die gesamten Spalten meint. Möglicherweise reicht es ihr aus, die oberen Kästchen zu zeigen, da aufgrund des Aufbaus die restlichen Kästchen mit eingeschlossen sind. Diese Argumentation wird im Projekt als *Rhythmisierte Einzelobjekte* kategorisiert. Nach erneuter wortgleicher Nachfrage der Interviewerin, ändert sie ihre Argumentation:

- 1 M Daran, dass da drei drei Reihen immer sind [fährt in Darstellung zum  $6 \cdot 5$  mit
- 2 dem Zeigefinger nacheinander die Kästchen der einzelnen Zeilen bis zum ein-
- 3 gezeichneten roten Mittelstrich entlang] Und da auch [fährt in Darstellung
- 4 zum  $6 \cdot 5$  mit dem Zeigefinger nacheinander die Kästchen der einzelnen Zeilen
- 5 nach zum eingezeichneten roten Mittelstrich entlang].

Sie fährt nun mit ihrem Zeigefinger je drei Kästchen auf der Darstellung entlang (immer bis zum roten Strich, Abb. 1, Z. 1-3) und benennt explizit die Reihen (Z. 1). Sie wechselt somit zu einem *Längenargument*. Ein Verteilargument (vgl. rote Teilstrich in der Darstellung) wird in der im Reflexionsgespräch verbalisierten Argumentation nicht geäußert.

3. Das *verschriftlichte Argument* (als Ergänzung des Halbsatzes ‚Das ist immer so, weil...‘) beantwortet Miriam mit ‚da ich 3 Kästchen breit ist.‘ Hier verwendet sie explizit ein *Längenargument* („3 Kästchen breit“), das sie zuvor auch in der Reflexion genutzt hat. Die Begründung greift damit einen wesentlichen Teilaspekt einer anschaulichen, vollständigen Begründung auf.

## Fazit

In diesem einzelnen Beispiel, das exemplarisch das Vorgehen der im Projekt verwendete qualitative Analyse darstellt, ändert Miriam während des Interviews ihre Argumentation von einem *Einzelobjekt* hin zu einem *Längenargument*. Sie nutzt so das Argument, das sie auch in ihrem verschriftlichten Argument und in der Herstellung der Darstellung verwendet. Im Posttest verwendet sie das Argument innerhalb der Darstellung (2er- Seitenlänge in der Vertikalen), nicht aber in ihrer schriftlichen Argumentation. Aktuell werden die weiteren Interviews analysiert. Eine erste Durchsicht lässt vermuten, dass nicht nur Miriam das Argument der Länge auch in ihren weiteren Bearbeitungen der Lernumgebungen verwendet, sondern auch andere teilnehmende Kinder. Die Ergebnisse der vorliegenden Analyse können daher gegebenenfalls als Grundlage für die Entwicklung einer Hypothese zu den Denkwegen bei der Bearbeitung anschaulicher Beweise dienen.

## Literatur

- Dreyfus, T., Nardi, E. & Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (S. 191–213). Springer.
- Konrad, K. (2020). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 373–393). Springer
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Elsevier Spektrum Akademischer Verlag
- Landgraf, V. (2019). Die Pilotstudie des Projekts ‚Anschauliches Beweisen im Mathematikunterricht der Grundschule‘ (schauMal). In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 469-472). WTM-Verlag.
- Landgraf, V. (2020). Teilbarkeit anschaulich darstellen – Potenziale für anschauliche Beweise. In H.-S. Siller, W- Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 589-592). WTM.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Schifter, D. (2009). Representation-based Proof in the Elementary Grades. In D. A. Stylianou (Hrsg.), *Teaching and learning proof across the grades. A K-16 perspective* (S. 71–86). Routledge.
- Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften*. Springer.
- Wittmann, E. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, 37, 213–232.