

Michelle BRÄUER, Halle a. d. S. & Denise LENZ, Halle a. d. S.

## Über das Potenzial des Waagemodells zur Anbahnung frühen algebraischen Denkens

Im Folgenden soll ein Einblick gegeben werden, wie das Waagemodell in Form von physischen Waagen, als auch in gängigen Schulbüchern und -materialien der Grundschule aufgegriffen wird, welche Potenziale sich hinsichtlich der Anbahnung frühen algebraischen Denkens im Grundschulalter zeigen und inwieweit dies ausgebaut werden könnte. Hierfür soll in diesem Artikel auch ein laufendes Dissertationsprojekt vorgestellt werden.

### Das Waagemodell in Spiel und Schule

Um das Funktionsprinzip von Waagen zu verstehen und später in ikonischen Repräsentationen darauf zurückgreifen zu können, scheint der Einsatz physischer Waagen zunächst auch innerhalb eines informellen Zugangs z.B. beim Kaufladen-Spielen unumgänglich. So lassen sich erste Erfahrungen im Abwiegen verschiedener Objekte sammeln, um die Relationen schwerer - leichter - gleich schwer zu verstehen und deren physische Auswirkungen auf Waagen beobachten zu können. Verschiedene Spielzeuganbieter nutzen zusätzlich Zahlenangaben in Form von natürlichen Zahlen (bspw. Monster-Waage, siehe Abb. 1) oder gar Bruchzahlen (bspw. Holzwaage der Marke Eichhorn). Dies kann zwar einen Übergang zu symbolischen Repräsentationen hin zu Gleichungen anregen, ist jedoch auch aufgrund der Vermischung der Zahlaspekte kritisch zu betrachten. Des Weiteren stoßen physische Waagen an ihre Grenzen, wenn es auf eine solche Weise um die Veranschaulichung von Additionen und Subtraktionen geht.



**Abb. 1:** Waage der Firma Hape mit Monstern als Gewichtsstücken

Betrachtet man entsprechende Aufgaben aus Schulbüchern und -materialien fällt auf, dass diese sehr stark mit dem Größenbereich Masse verbunden sind und meist die Masse eines Gegenstandes in Relation zu Gewichtsstücken bestimmt werden soll. Unterschiede zeigen sich in der Anzahl der Unbekannten und darin, ob die Relation innerhalb einer Waage oder zwischen mehreren

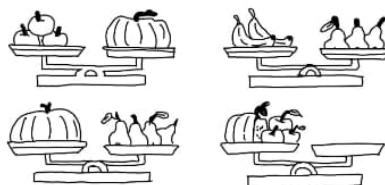
Waagen dargestellt ist (siehe linkes Aufgabenbeispiel in Abb. 2). Arbeitsaufträge lauten dann oftmals: „Wie schwer ist ...?“ oder „Wie viel wiegt ...?“. Beim rechten Aufgabenbeispiel in Abbildung 2, als „Gewichtsrätsel“ vom Verlag bezeichnet, wird wiederum ansatzweise deutlich, wie reichhaltig Aufgabenformate in Bezug zum Waagemodell gestaltet sein können. Hierbei wird verlangt, dass Relationen zwischen vier Unbekannten hergestellt und genutzt werden, um zu bestimmen, wie viele Objekte man benötigt, um die letzte Waage im Gleichgewicht zu halten. Bei dieser Aufgabe zeigen sich Potenziale zur Anbahnung frühen algebraischen Denkens. Die Komplexität nimmt mit steigender Anzahl der Unbekannten zu, sodass der Prozess der Aufgabenbearbeitung stärker fokussiert werden kann. Die Nutzung konkreter Objekte erschwert das Abstrahieren unbekannter Größen.

Wie viel wiegt **eine** Kugel? Rechne und antworte.



(in Anlehnung an Denken und Rechnen 3 S. 64 Aufg. 3b)

Wie viele Bananen musst du auf die letzte Waagschale legen, damit sie im Gleichgewicht ist? Male.



(in Anlehnung an Forscherheft Mathematik 3/4 S.18)

**Abb. 2:** Beispiele aus Schulbüchern und -materialien (Nachbildung)

## Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand

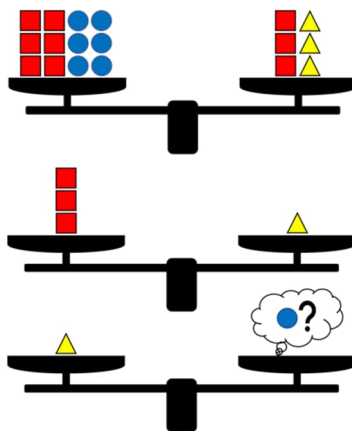
Dass Kinder im frühen Grundschulalter und teilweise bereits im Kindergartenalter ein algebraisches Gleichheitsverständnis aufweisen und auch Beziehungen zwischen vielfältigen unbekanntem Werten herstellen, zeigen Studien, die auf unterschiedliche Repräsentationen mit Hilfe Murmeln und Schachteln zurückgreifen (vgl. Lenz 2021; Schliemann et al. 2007).

Bei der Hinführung zum Lösen linearer Gleichungen wird vielfach das Waagemodell in physischer oder ikonischer Form genutzt, um Äquivalenzumformungen prozedural bereits ab der Primarstufe anzubahnen. Warren & Cooper (2005) legten mit einer unterrichtsbegleitenden Interviewstudie dar, dass der Umgang von Drittklässler\*innen mit Unbekannten unter Nutzung der Grundidee des Waagemodells gefördert und gleichwohl insbesondere eine umfassendere relationale Sicht auf Gleichheit angebahnt werden könne. Otten et al. (2019) zeigten in einer Interventionsstudie, u.a. mithilfe des Waagemodells, dass die Fähigkeit der Schüler\*innen, lineare Gleichungen mittels konventioneller algebraischer Strategien (Substituierung, Vereinfachen

etc.) auf mehr oder weniger intuitive Weise zu lösen, bereits in Klassenstufe 5 gefördert werden kann. Weitere Untersuchungen zeigten auch, dass sich algebraisches Denken hierdurch besser entwickle.

### Vorstellung Dissertationsprojekt und erste Ergebnisse

Bisherige internationale Studien basieren meist auf Interventionsprogrammen unter Nutzung physischer Waagen. Das noch laufende Dissertationsprojekt der Erstautorin fokussiert hingegen die Auseinandersetzung mit ikonisch repräsentierten Waagen. Hierbei wird der Umgang mit (mehreren) Unbekannten und deren Beziehungen als Aspekt früher Algebra durch leitfadengestützte Interviews mit Grundschüler\*innen untersucht.



**Abb. 3:** Exemplarisches Aufgabenbeispiel aus dem Dissertationsprojekt

Abbildung 3 zeigt eine der bereits eingesetzten Aufgaben, die mit dem Vorhandensein mehrerer Unbekannter pro Waagschale. Für die Bearbeitung müssen vielfältige Beziehungen zwischen Waagschalen einer Waage und den Waagen untereinander genutzt werden. Die eingesetzten Aufgaben basieren auf einem Design mit gleichbleibender Anzahl von Unbekannten in Form verschiedenfarbiger geometrischer Formen. Grundlage bietet eine Systematisierung, welche zwischen den Angaben der gegebenen und gesuchten Waagen (Bräuer, im Druck), der dargestellten Relationen untereinander sowie hinsichtlich möglicher zu nutzender Vorgehensweisen unterscheidet. Hierbei wird untersucht, inwiefern die gewählte Repräsentation ermöglicht, dass sich die Interviewten intuitiv mit in Form von Waagen dargestellten linearen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen auseinandersetzen. Dabei kann vermutet werden, dass möglicherweise auf Vorerfahrungen (bspw. im Umgang mit physischen Waagen in Alltags- und Spielsituationen) zurückgegriffen wird. Die Schüler\*innen könnten somit an dessen Konzept und den Umgang mit Unbekannten herangeführt werden, um des Weiteren möglichen, vielfach in der Forschung belegten Schwierigkeiten beim Erlernen der Algebra (Gleichheitsverständnis) in der weiterführenden Schule wie im fachdidaktischen Diskurs gefordert, stärker vorzubeugen.

Mit der ersten Pilotierung konnte gezeigt werden, dass die beteiligten Dritt- und Viertklässler\*innen mit in dieser Art von Aufgaben enthaltenen Unbekannten und Relationen umgehen können. In deren Bearbeitungen wurden unterschiedliche Zugänge der intuitiven Nutzung algebraischer Strategien sowie Unterschiede im Umgang mit den Relationen und deren Verbalisierung deutlich (Bräuer, im Druck).

## Ausblick

Der Einsatz von physischen Waagen hat insbesondere im frühen Mathematiklernen seine Berechtigung, da damit notwendige erste Erfahrungen gesammelt werden. Neben bereits bekannten Potenzialen zeichnet sich bereits jetzt ab, dass Schüler\*innen unter Zuhilfenahme des Waagemodells an den Umgang mit (mehreren) Unbekannten und das Konzept zum Lösen linearer Gleichungen herangeführt werden könnten, um bereits bekannte Schwierigkeiten beim Erlernen der Algebra (u.a. Gleichheitsverständnis) stärker vorzubeugen. An dieser Stelle gilt es, weitere Forschungsarbeit zu leisten, um die Potenziale des Waagemodells in dieser Repräsentationsform hinsichtlich des Gleichheitsverständnisses und des Umgangs mit Unbekannten herauszuarbeiten.

## Literatur

- Bräuer, M. (im Druck). Dealing with multiple unknowns and their relationships using the balance scale model at primary school age. *Proceedings of the 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Buttermann, E., Eidt, H., Lack, C., Lammel, R. & Wichmann, M. (2016). *Denken und Rechnen 3*. Westermann.
- Lenz, D. (2021). *Relationales Denken und frühe Konzeptionalisierungen von Variablen. Eine Interviewstudie für Kindergarten- und Grundschulkinde*. WTM. <https://doi.org/10.37626/GA9783959871563.0>
- Mosel-Göbel, D., Stein, M. (2017). *Mathematik Differenzierungsmaterialien. Forscherheft 3/4*. Westermann Verlag.
- Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. & Heinze, A. (2019). Fifth-grade students solving linear equations supported by physical experiences. In U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 646–653). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416443>
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W. & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas To Classroom Practice*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Warren, E. & Cooper, T. J. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal*, 17(1), 58–72. <https://doi.org/10.1007/BF03217409>