Julchen BRIEGER, Chemnitz

"Die Zahlenwelt ist das Hotel" - Hilbert, Unendlichkeit und der Zahlenteufel in der Grundschule

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können“ (Hilbert, 1926, S. 170). Mit diesem Zitat bezieht sich David Hilbert auf die Manifestation des aktual Unendlichen in der Mengenlehre durch Georg Cantor. Zur Verbildlichung der Gleichmächtigkeit von Mengen der Mächtigkeit $\aleph_o$ kann Hilberts Gedankenexperiment zum unendlich großen, aber vollends von unendlich vielen Gästen ausgebuchten Hotel herangezogen werden. Dieses Gedankenexperiment wurde im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Unendlichkeit an einer Grundschule (3. Klasse) mit Hilfe philosophischer Methoden erschlossen und diskutiert.

Zur Notwendigkeit einer Propädeutik für Unendlichkeit

Grenzwerte und Schranken sind in den meisten Curricula der Sekundarstufe II implizit qua Infinitesimalrechnung (u.v.m.) eingeschlossen. Ein implizites Verständnis mathematischer Unendlichkeit ist von Nöten, um diese Unterrichtsinhalte adäquat begreifen zu können. Epistemologisch gesehen werden an dieser Stelle aber zwei Arten von Unendlichkeit miteinander verbunden, deren Trennung m. E. an dieser Stelle von Relevanz wäre: Folgen repräsentieren *potentielle* Unendlichkeit, während die Äquivalenz einer Folge oder Reihe mit ihrem Grenzwert ein Verständnis von *aktualer* Unendlichkeit voraussetzt. Das prominenteste Beispiel für den hierdurch entstehenden kognitiven Konflikt der Lernenden ist die (angebliche) Gleichheit von $0,\overline{9}$ und 1. Zahlreiche Studien (Tall & Vinner, 1981; Bauer, 2011; Bedürftig & Murawski, 2015) belegen, dass sich die meisten Proband*innen zu diesem Problem nicht im Sinne der Gleichheit äußern, sondern angeben, $0,\overline{9}$ sei kleiner als 1. Einer der vielen Gründe für dieses Phänomen könnte folgender Konflikt sein: „(hypothesized) confusion between the fact that n does not reach infinity and the question of whether a_n may possibly ‘reach’ the limit L.” (Mamona-Downs, 2001, S. 263). Oben genanntes Beispiel sowie viele andere bei der Einführung der Differenzialrechnung auftretende Probleme sind Gründe für die Notwendigkeit eines Propädeutikums zum Thema Unendlichkeit. Dass man dieses Thema bereits in der Grundschule mit Kindern besprechen kann, ist Thema meiner Dissertation.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Philosophische Gespräche im Mathematikunterricht

Unendlichkeit ist inhaltlich ein Thema, welchem nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen anderen Wissenschaften, wie auch der Philosophie, eine große Bedeutung zugemessen wird. Zum einen wurden aus diesem Grund philosophische Gespräche und Methoden in die Planung mit einbezogen. Zum anderen sind philosophische Gespräche, besonders im Mathematikunterricht, auch ein konstruktives Mittel, um Reflexionen bei den Kindern anzuregen (Daniel et. al., 1999). Auch wenn es im angelsächsischen Raum schon unterrichtspraktische Versuchsreihen gab (English, 1992; Lafortune, 2003; Jankvist and Iversen, 2014), beschränken sich die Erkenntnisse im deutschsprachigen Raum auf sehr wertvolle, aber bislang theoretische Arbeiten (vgl. bspw. Helmerich et.al., 2010).

Ein Design-Based-Research-Ansatz: in der dritten Klasse über Unendlichkeit sprechen

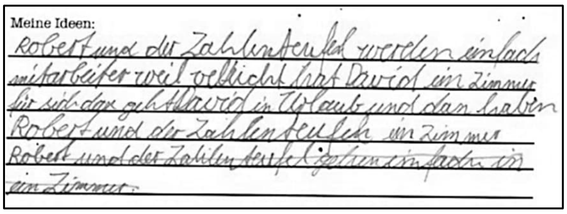
Die hier präsentierte Studie wurde in Anlehnung an die Methodik des Design-Researches (McKenney & Reeves, 2018; Bakker, 2018) konzipiert, aber als Design-*Based* umgesetzt. Dies bedeutet, dass der Fokus nicht auf die kontinuierliche Erstellung und Weiterentwicklung von Unterrichtseinheiten gelegt wurde, sondern lediglich ein Zyklus zweier Erhebungen, dafür aber eine tiefere Auswertung des gewonnenen Datenmaterials angestrebt wird. Die Auswertung erfolgt über die Interaktionsanalyse der interpretativen Unterrichtsforschung (Krummheuer & Brandt, 2001). Bisher wurden drei Unterrichtsstunden an einer Grundschule (3. Klasse) in Sachsen-Anhalt gehalten sowie gefilmt. Aktuell beginnt der zweite Entwicklungszyklus zur Gewinnung kontrastierenden Materials an einer privaten Gemeinschaftsschule in Sachsen-Anhalt (5. Klasse). Alle Stunden wurden anhand einer zum Teil übernommenen, zum Teil fiktiven Geschichte rund um Robert und den Zahlenteufel (Enzensberger & Berner, 2011) gestaltet. Jeder Zyklus sieht vier Unterrichtsstunden (Ux) vor. Die präsentierte Stunde ist die dritte im Zyklus (U3) – Robert und der Zahlenteufel möchten in David Hilberts Hotel einkehren, das ist allerdings mit seinen unendlich vielen Zimmern bereits von unendlich vielen Gästen ausgebucht.

Interessant an Hilberts Gedankenexperiment ist, dass das Hotel „itself corresponds to *actual* infinity – it is a completed, infinite entity“ (Mamolo & Zazkis, 2008, S. 172). Eine Beschäftigung mit aktualer Unendlichkeit in der dritten Klasse scheint früh gegriffen, dennoch unterschieden sich die Antworten der Kinder nicht wesentlich von den von Mamolo & Zazkis (2008) untersuchten Studierenden (freie Künste und Master Lehramt Mathematik).

Besonders die pragmatischen Ansätze der Studierenden finden sich auch in den Antworten der Schüler:innen wieder.

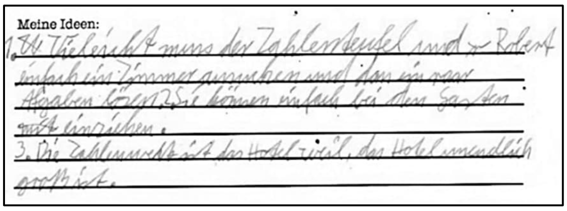
Ben (Abbildung 1): David Hilbert soll Urlaub machen, damit Robert und der Zahlenteufel sein Zimmer bekommen können – „having the manager vacate his own room“ (Mamolo & Zazkis, 2008, S. 173).

Nadja (Abbildung 2): ein Paar hatte Einzelzimmer gebucht und soll nun in ein Doppelzimmer ziehen – „putting 2 or more guests in the same room“ (Ebd.)



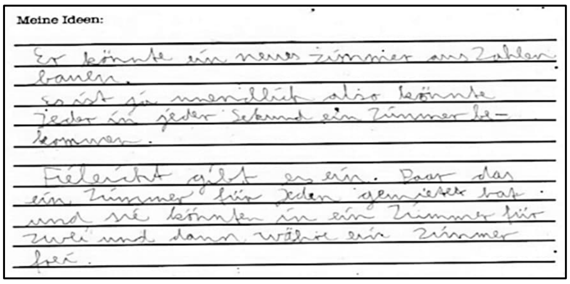
Robert und der Zahlenteufel werden einfach mitarbeiter weil villeicht hat David ein Zimmer für sich dan geht David in Urlaub und dan haben Robert und der Zahlenteufel ein Zimmer

Abb. 1: Bens Lösung



1.Vieleicht muss der Zahlenteufel und Robert einfach ein Zimmer aussuchen und dass ein paar Afgaben lösen? 2. Sie können einfach bei den Garten einziehen 3. Die Zahlenwelt ist das Hotel

Abb. 2: Quentins Lösung



Er könnte ein neues zimmer aus Zahlen bauen.

Es ist ja unendlich als könnte jeder in jeder Sekunde ein Zimmer bekommen.

Fielecht gibt es ein Paar das ein Zimmer für jeden gemietet hat und sie könnten in ein Zimmer für zwei und dann währe ein Zimmer frei.

Abb. 3: Nadjas Lösung

Auffällig hier sind die zwei Passagen „die Zahlenwelt ist das Hotel“ (Quentin, Abb. 2) und „Es ist ja unendlich also könnte jeder in jeder Sekunde ein Zimmer bekommen“ (Nadja, Abb. 3). In allen gehaltenen Unterrichtseinheiten hatten die Kinder beim Thema Unendlichkeit starke Vorstellungen bzgl. der Unendlichkeit des Raumes und der Zeit. Nadja ist mit ihrem Vorschlag m. E. sehr nah an Hilberts Lösung des Gedankenexperiments – das unendliche Weiterrücken und die Vorstellung, jeder könne in jeder Sekunde ein neues Zimmer bekommen, korrespondieren beide nicht mit *potentieller*, sondern *aktualer* Unendlichkeit. Quentin sprach seine dritte Idee im weiteren Verlauf der Stunde im Plenum an und gab seine Verwirrung darüber kund, dass das Hotel doch eigentlich sämtlichen dem Universum zur Verfügung stehenden Raum einnehmen müsste, wenn es auch unendlich groß ist.

Definitiv zeigen aber bereits diese drei Dokumente für sich stehend auf, dass Beschäftigung mit Unendlichkeit im philosophisch-mathematischen Setting in der Grundschule durchaus realisierbar ist und fruchtbare, kreative Ideen und Diskussionen aus ihnen entspringen können. Im weiteren Analyseprozess sollen die in Gruppenarbeiten und im Plenum entstandenen Gesprächskulturen näher untersucht werden.

Literatur

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers*. Routledge

Bauer, L. (2011). Mathematik, Intuition, Formalisierung: Eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu 0;9. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32*(1), 79–102.

Bedürftig, T. und Murawski, R. (2015). *Philosophie der Mathematik.* de Gruyter.

Daniel, M.-F., Lafortune, L., Pallascio, R., und Schleifer, M. (1999). Philosophical Reflection and Cooperative Practices in an Elementary School Mathematics Classroom. *Canadian Journal of Education/Revue canadienne de l'éducation, 24*(4), 426–440.

English, L. (1992). Philosophy for Children and Mathematics Education. *Thinking: The Journal of Philosophy for Children, 10*(1), 15–16.

Enzensberger, H. M. und Berner, R. S. (2011). *Der Zahlenteufel: Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben*. dtv Reihe Hanser. Dt. Taschenbuch-Verl.

Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G. und Rathgeb, M. (2010). *Mathematik verstehen: Philosophische und didaktische Perspektiven*. Vieweg+Teubner

Hilbert, David (1926): Über das Unendliche. *Mathematische Annalen, 95*(1), 161–190

Jankvist, U. T. und Iversen, S. M. (2014). 'Whys' and 'Hows' of Using Philosophy in Mathematics Education. *Science & Education, 23*(1), 205–222.

Krummheuer, G. und Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion: partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Beltz

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the Intuitive Bear on the Formal: A Didactical Approach for the Understanding of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2/3), 259–288.

McKenney, S. und Reeves, T. C. (2018). *Conducting Educational Design Research.* Routledge

Tall, D. und Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169