Maximilian BÜTTNER, Halle a.d.S. & Kirstin ERATH, Halle a.d.S.

Beziehungen zwischen Bedeutungselementen und grafischen Darstellungen in der Trigonometrie

Die Einführung in die Trigonometrie stellt für viele Lernende eine große Herausforderung innerhalb des Mathematikunterrichts dar. Dies ist keine Überraschung: Das Thema verbindet Ansätze der Geometrie mit einer neuen Klasse von Funktionen, die nicht in, für Lernende bekannte, algebraische Ausdrücke übersetzt werden können. Eine Möglichkeit zur Spezifizierung und Strukturierung des Themengebietes stellt der 4-Stufen-Ansatz (Hußmann & Prediger, 2016) dar, bei dem der Unterrichtsgegenstand auf formaler, semantischer, konkreter und empirischer Ebene analysiert wird und als Ergebnis verschiedene Lernpfade im Rahmen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung designt werden. Eine erste Analyse auf semantischer Ebene, die u.a. Grundvorstellungen in den Blick nimmt, ergibt das in Abbildung 1 dargestellte Beziehungsnetz, welches im Folgenden ausführlich erläutert wird.

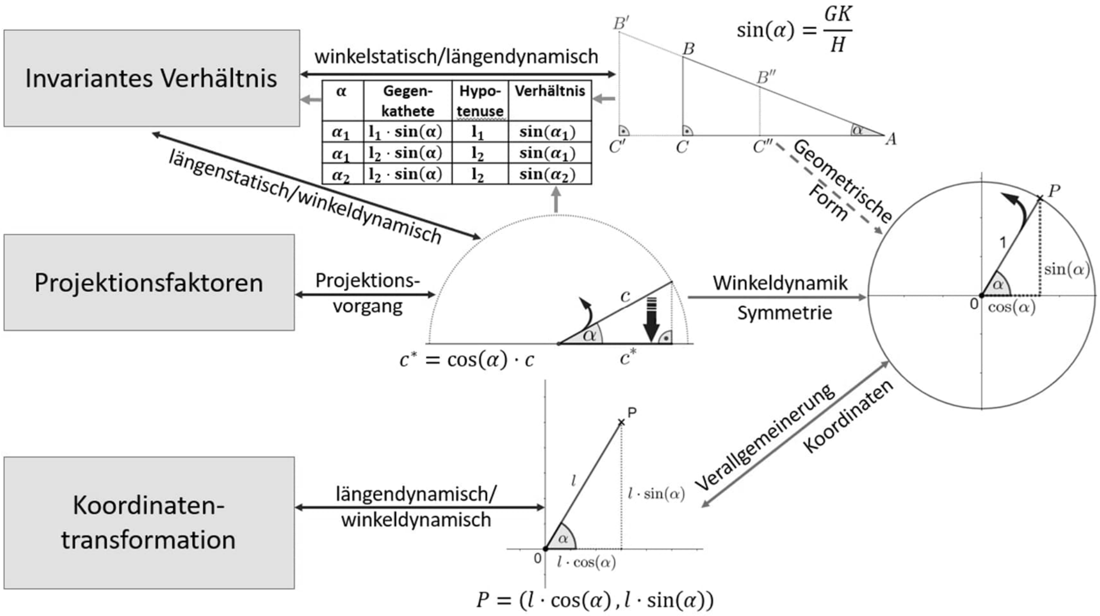

Abb. 1: Netz von Bedeutungselementen und grafischen Darstellungen

Salle und Frohn (2017) stellen vier verschiedene Grundvorstellungen zum Thema Trigonometrie auf: die Verhältnisvorstellung (invariantes Verhältnis zweier Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck), die Projektionsvorstellung (Sinus und Cosinus als Projektionsfaktoren bei der orthogonalen Projektion), die Einheitskreisvorstellung und die Oszillationsvorstellung (Vorstellung von oszillierenden Vorgängen). Da die Oszillationsvorstellung erst zu einem späteren Zeitpunkt im Spiralcurriculum relevant wird, soll diese für den hier betrachteten Einstieg in die Trigonometrie unbeachtet bleiben.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Brown (2005) analysiert Lernendenvorstellungen am Einheitskreis auf Basis der Concept-Image-Theorie (Tall & Vinner, 1981). Die Argumentations- und Bearbeitungspraktiken der Lernenden unterscheiden sich dabei deutlich: Eine Gruppe argumentiert anhand rechtwinkliger Dreiecke, eine zweite anhand von Längen, die durch die Projektion von Punkten auf dem Einheitskreis gedanklich sichtbar werden und eine dritte Gruppe bezieht sich auf die Werte der Koordinaten der Punkte auf dem Einheitskreis. Nach Salle und Frohn (2017) liegt aufgrund der verwendeten Darstellung in jedem dieser drei Fälle die Einheitskreisvorstellung vor, wobei in den ersten beiden Fällen zusätzlich die Verhältnis- und Projektionsvorstellung aktiviert wird. Für eine differenziertere Analyse wird daher vorgeschlagen, das Grundvorstellungskonzept nach vom Hofe (1995) zunächst feiner aufzufächern. Im Folgenden werden *Bedeutungselemente*, die den semantischen Kern einer Grundvorstellung ansprechen und insbesondere in der mathematischen Struktur und der Begriffsgenese hervortreten, von möglichen grafischen Darstellungen auf analytischer Ebene getrennt betrachtet. Die Verhältnisvorstellung (Salle & Frohn, 2017) fächert sich dadurch in das Bedeutungselement „Invariantes Verhältnis" und die Darstellung des rechtwinkligen Dreiecks auf, während die Projektionsvorstellung sich aus dem Bedeutungselement „Projektionsfaktoren" und der Projektionsdarstellung (Abb. 2, Mitte) zusammensetzt. Die Einheitskreisvorstellung beinhaltet zwar die eben betrachteten Bedeutungselemente, bietet aber die neue Darstellung des Einheitskreises, welche diese Bedeutungselemente aktivierbar macht. Aufgrund von Studienergebnissen und stoffdidaktischer Analysen (Brown, 2005; Malle, 2001), ist es notwendig, die „Koordinatentransformation" als weiteres Bedeutungselement einzuführen. Bei Salle und Frohn (2017) ist dieses Bedeutungselement in der Projektionsvorstellung inkludiert. Dieses Bedeutungselement greift die Vermittlerrolle von Sinus und Cosinus bei der Transformation von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten auf, wodurch sich Punkte im Raum durch den Abstand zum Koordinatenursprung und dem Polarwinkel beschreiben lassen. Dieses Bedeutungselement bildet zusammen mit der Darstellung des Koordinatensystems (Abb. 2, rechts) eine neue Grundvorstellung: die *Koordinatenvorstellung*. Um untersuchen zu können, wie sich die Grundvorstellungen gegenseitig beeinflussen und bedingen, ist die vorgestellte Spezifizierung in Bedeutungselemente und grafische Darstellungen vielversprechend, da so auf empirischer Ebene Lernprozesse differenzierter untersucht werden können.

Ausgehend von den grafischen Darstellungen wird im Folgenden genauer untersucht, über welche Strukturelemente und Vorstellungen diese mit den Bedeutungselementen verbunden sind. Denn obwohl in allen Darstellungen rechtwinklige Dreiecke zu finden sind, regen die verschiedenen Darstellungen unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten an. Insbesondere die Art des angesprochenen funktionalen Denkens (Vollrath, 1989) unterscheidet sich dabei maßgeblich.

In der grafischen Darstellung der ineinander geschachtelten Dreiecke (Abb. 2, links) ist der Winkel α starr, während sich die Seitenlängen gedanklich dynamisch verlängern oder verkürzen lassen (vgl. gestrichelte Linien). Stoppt man diese gedankliche Längenänderung, erhält man ein neues ähnliches rechtwinkliges Dreieck. Dieses neue Dreieck kann als statisches Objekt interpretiert werden, wodurch ein Messen der Dreiecksseiten und ein Festhalten dieser Werte in einer Wertetabelle möglich ist. Anhand dieses Messprozesses wird die Invarianz des Verhältnisses zweier Dreiecksseiten transparent und die Zuordnung des Verhältnisses zu einem Winkel explorierbar.

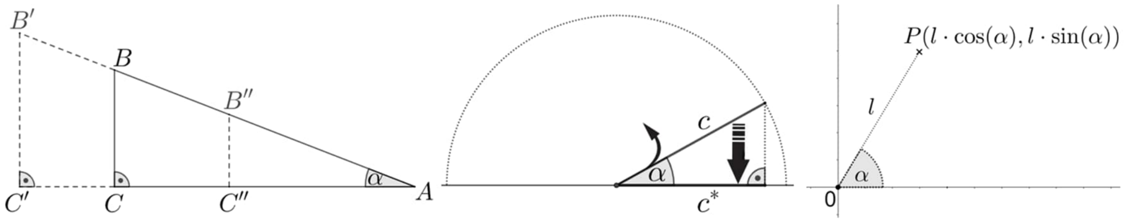

Abb. 2: rechtwinklige Dreiecke, Projektionsdarstellung, Koordinatensystem

Die Projektionsdarstellung (Abb. 2, mitte) verbindet zwei unterschiedliche dynamische Vorstellungen miteinander. Die erste liegt darin, dass durch das gedachte Drehen der Hypotenuse um den Mittelpunkt des Halbkreises (vgl. linker Pfeil in der Projektionsdarstellung) im Gegensatz zum soeben betrachteten Fall eine Dreiecksseite konstant lang gelassen wird, während sich die Winkelgröße α ändert. Bricht man die Drehbewegung gedanklich ab, lässt sich durch Ermitteln der Seitenlängen feststellen, dass zu verschiedenen Winkeln unterschiedliche Verhältniswerte gehören ($\alpha < 90°$).

Die zweite Vorstellungsdynamik liegt im Projektionsvorgang begründet (vgl. rechter Pfeil in der Projektionsdarstellung). Eine mögliche Interpretation dieses Vorgangs stellt folgender Beobachtungsprozess dar: Eine Strecke, die schräg zur Projektionsebene steht, sieht senkrecht von oben betrachtet kürzer aus, als ihre wahre Länge vorgibt. Symbolisch betrachtet werden die trigonometrischen Funktionswerte zu Skalierungsfaktoren ($c^* = \cos(\alpha) \cdot c$). Weiterhin wird anhand dieser Darstellung eine erste Verallgemeinerung der trigonometrischen Funktionen auf Winkelgrößen $0° < \alpha < 180°$ ermöglicht. Die Projektionsdarstellung bietet daher viel Raum funktionales Denken bei der Begriffsbildung, Problemlösung und Ergründung des Änderungsverhaltens trigonometrischer Funktionen einzusetzen.

Die Darstellung des Koordinatensystems (Abb. 2, rechts) stellt den variabelsten Fall dar. In dieser Darstellung können sowohl der Winkel α, als auch der Abstand des Punktes zum Koordinatenursprung variiert werden, weshalb diese Darstellung sogar allgemeiner als der Einheitskreis ist, bei dem der Radius immer einer Einheit entspricht. Daher ist es eine offene Frage, ob diese Darstellung in einem Lernpfad vor oder nach der Einheitskreisdarstellung thematisiert werden sollte. Dass das Bedeutungselement der Koordinatenvorstellung auch ohne Explikation im Lernpfad dieser Darstellung von Lernenden aktiviert werden kann, zeigen die Ergebnisse von Brown (2005). Die verschiedenen Strukturelemente der soeben besprochenen Darstellungen (geometrische Form, Winkeldynamik, Koordinaten) werden im Einheitskreis zusammengeführt, weshalb er innerhalb von Abbildung 1 als Art Zieldarstellung erscheint.

Das Beziehungsgefüge stellt das Ineinandergreifen verschiedener Grundvorstellungen mit ihren Bedeutungselementen und Darstellungen eindrücklich dar. Dies zeigt, dass sich die Herausforderung für Lernende auch in der didaktisch-analytischen Auseinandersetzung auf semantischer Ebene widerspiegelt. Im Rahmen der im Prozess befindlichen Entwicklungsforschungsstudien sollen auf dieser Basis unter anderem folgende Fragen empirisch beantwortet werden: Können Grundvorstellungen leichter aktiviert werden als andere, sodass eine Reihenfolge im zugehörigen Lernpfad induziert wird? Welche Eigenschaften trigonometrischer Funktionen können mithilfe welcher Grundvorstellungen am besten exploriert werden? Obwohl das vorgestellte Beziehungsnetz diese und weitere Fragen nicht direkt beantworten kann, führt es zu einer Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes und kann differenziertere Analysen ermöglichen.

Literatur

Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connection: students' understanding of sine and cosine*. Illinois State University.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Malle, G. (2001). Genetisch in die Trigonometrie. *mathematik lehren, 109*, 40–44.

Salle, A. & Frohn, D. (2017). Grundvorstellungen zu Sinus und Cosinus. *mathematik lehren, 204*, 8–12.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Vollrath, H. J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 10*(1), 3–37. https://doi.org/10.1007/BF03338719

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum.