Anna DELLORI, Paderborn & Lena WESSEL, Paderborn

Entwicklung und Erprobung von professionsorientierten Lernumgebungen zur Wissensvernetzung in der Algebra

Viele Mathematik-Lehramtsstudierende sehen während ihres Studiums wenig bis kaum Verbindungen zwischen den Inhalten der fachmathematischen Veranstaltungen und ihrem späteren Beruf als Lehrkraft. Dieses Problem der zweiten Diskontinuität möchten wir adressieren, indem professionsorientierte Lernumgebungen für gymnasiale Lehramtsstudierende entwickelt werden, die Gruppentheorie in der Algebra mit arithmetischen und algebraischen Inhalten der Schule vernetzen.

Theoretischer Rahmen

Zur Berücksichtigung der Professionsorientierung bietet sich eine Differenzierung der fachmathematischen Mathematik in lokale und nichtlokale Inhalte an. Die lokale Mathematik bezieht sich dabei auf die mathematischen Inhalte, die eine Lehrperson unterrichtet bzw. unterrichten wird (Wasserman, 2018). Das Potenzial der nichtlokalen Mathematik (z.B. der Gruppentheorie) sieht Wasserman in ihrem potenziellen Einfluss auf die Umstrukturierung („reshaping“) des Verständnisses der lokalen Mathematik. Dies lässt sich aufbauend auf Lee (2018) genauer als „a change in one’s cognitive system that accompanies a transformation of existing understandings, together with the construction of new knowledge” (S. 45) konzeptualisieren und äußert sich in vier verschiedenen Facetten. Es kann sich (1) in der *Vertiefung* des Verständnisses eines Konzepts (z. B. Neutralelement), (2) in der *Erweiterung* der Anwendungsbereiche, in dem das Konzept angewendet werden kann (z.B. die Identität als Neutralelement der Symmetrieabbildungen), (3) in dem *Vereinheitlichen* scheinbar zusammenhangsloser Teilkonzepte unter einem übergreifendem Konzept (z.B. Vereinheitlichen der Null, Eins und Identität als Neutrale Elemente) und (4) in der *Stärkung* der Verbindung zwischen verschiedenen Konzepten (z.B. Neutralelement und Inverse Elemente) niederschlagen. Folglich ergibt sich die Frage, wie Lernumgebungen zur Initiierung dieser Umstrukturierungsprozesse gestaltet werden können.

Methodischer Rahmen

Die Gestaltung der Lernumgebungen erfolgt im Rahmen eines Design-Research Projekts, bei dem die empirisch fundierte Entwicklung der Lehr-Lern-Arrangements iterativ mit der empirischen Lernprozessanalyse verknüpft wird (Prediger, 2019). Der vorliegende Beitrag fokussiert sich auf die Spezifikation und Strukturierung des Lerngegenstands und die Formulierung

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

von vorläufigen Designprinzipien als die zwei zentralen Schritte des Entwicklungsprozesses des Lehr-Lernarrangements.

Spezifikation des Lerngegenstands

Ein wesentlicher Punkt der Spezifikation des Lerngegenstands liegt in der Bestimmung nichtlokaler Inhalte, die produktiv für die Umstrukturierung lokaler mathematischer Inhalte sein können. Gymnasiale Lehramtsstudierende begegnen der Gruppe als algebraische Struktur i.d.R. im ersten Semester in der Linearen Algebra und häufig erneut in einer fachlichen Algebraveranstaltung im späteren Studienverlauf. Bei den Gruppenaxiomen (*nichtlokal*) handelt es sich um genau die Schritte, die notwendig sind, um einfache lineare Gleichungen zu lösen (*lokal*). Zudem eignen sich Gruppentheorie und abstrakte algebraische Strukturen (*nichtlokal*), um die Konzepte der Assoziativität und Kommutativität (*lokal*) *zu vertiefen* und die Verbindung und Abgrenzung *zu stärken*. Studierende haben wie Schüler*innen häufig Probleme, zwischen diesen beiden Eigenschaften zu differenzieren (Larsen, 2010).

In der Schule werden die Addition und Subtraktion bzw. die Multiplikation und Division von Zahlen als Umkehroperationen aufgefasst, hingegen besitzt die Operation $(a, b) \to a^b$ mit dem Wurzelziehen und Logarithmieren zwei Umkehroperationen. Bei Brüchen und negativen Zahlen wird von Kehrbrüchen und Gegenzahlen gesprochen. Diese *lokalen* Inhalte werden häufig unverbunden betrachtet. Die Beschäftigung mit inversen Elementen in algebraischen Strukturen (*nichtlokal*) besitzt das Potenzial, diese unter der fundamentalen Idee des Umkehrens und Bildens inverser Elemente *zu vereinheitlichen* (Greer, 2012). Die hier skizzierten Inhaltsbereiche spiegeln sich als thematischer Fokus in den Lernumgebungen wider (siehe Abb. 1).

Vorläufige Designprinzipien

Zur Vernetzung des fachlichen Lernens mit dem professionsspezifischen Lernen schlagen Wasserman et al. (2017) ein Instruktionsmodell vor, entlang dessen Lernumgebungen im Unterrichtskontext beginnen *(building-up)*, darauf aufbauend den fachmathematischen Inhalt erlernen *(learning)* und anschließend wieder in den Unterrichtskontext zurückkehren *(stepping-down)*. Dies bildet die Grundlage für das vorläufige Designprinzip *Sequenzierung der Lernumgebung in einem Drei-Schritt des building-up, re-learning und stepping-down*. Beispielhaft ist dies in der ersten Lernumgebung so umgesetzt, dass die Studierenden im *building-up* eine Schülerinnenlösung der Gleichung $x + 5 = 12$ erhalten und im *stepping-down* einen Schulbuchauszug zu günstigen Strategien für das Lösen von Gleichungen beurteilen und adaptieren (siehe Abb. 1). In der mittleren Phase geht es um das Wiedererkennen (*re-learning*) der Gruppenaxiome als Grundlage für das Lösen linearer Gleichungen. Allerdings benötigt es ein weiteres Designprinzip auf Aufgabenebene, welches die Vernetzung der Gruppenaxiome mit dem Lösen von Gleichungen unterstützt.

L1 Gleichungen lösen Die Studierenden …	**L2 Arithmetische Eigenschaften** Die Studierenden …	**L3 Inverse und Umkehroperationen** Die Studierenden …
• vollziehen eine Lernendenbearbeitung zu x+5=12 nach.	• ordnen Schulbuchauszüge in Curriculumsspirale ein. • formulieren eine fundamentale Idee. • vollziehen eine Lernendenbearbeitung zu 64+3+97=3+97+64 nach.	• ordnen Schulbuchauszüge in die Curriculumsspirale ein. • formulieren eine fundamentale Idee.
• bestimmen die Hintereinanderausführung von Symmetrieabbildungen. • vollziehen eine Bearbeitung der Gleichung $d_{120} \circ x = s_1$ nach. • identifizieren Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Bearbeitungen. • stellen Voraussetzungen für das Lösen einer allg. Gleichung $x * a = b$ auf.	• wiederholen und verbalisieren die Definition der Assoziativität und Kommutativität. • nehmen Stellung zu der Aussage „Aus kommutativ folgt assoziativ!“. • überprüfen die Eigenschaften von versch. algebraischen Strukturen (lokal und nichtlokal). • überprüfen die Gültigkeit von analogen Umformungen zu 64+3+97=3+97+64 in nichtlokalen algebraischen Strukturen.	<u>Inverse als Umkehroperation</u> • vollziehen die formale Definition der Umkehroperation nach und beziehe es auf die Mltpkt. • erklären das Problem der Division mit Null. <u>Inverse als Manipulation des Elements</u> • nehmen Stellung zur Lernendenfrage „Was ist ein Kehrbruch?“. • identifizieren die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = 1$ und $d_{120} \circ d_{240} = id$.
• nehmen Stellung zur Aussage „So viel anders war das gar nicht.“. • beurteilen und adaptieren einen Schulbuchauszug zu günstigen Strategien zum Gleichungen lösen.	• beurteilen und adaptieren einen schulischen Merkkasten zur Kommutativität und Assoziativität. • reflektieren die Einordnung in die Spirale und die fundamentale Idee.	• erklären die Gleichheit von $\frac{3}{8} : \frac{2}{7} = \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{2}$. <u>Inverse als Umkehroperation (rechts- und linksseitig)</u> • nehmen Stellung zur Lernenendenfrage „Wie mache ich 4^2 rückgängig?“. • vollziehen die formale Definition der rechts- & linksseitigem Umkehroperationen nach. • interpretieren das Potenzieren und Logarithmieren als links bzw. rechtsseitige Umkehroperationen.
		• reflektieren die Einordnung in die Spirale und die fundamentale Idee.

Abb. 1: Überblickstabelle der Lernumgebungen

Auf Schulebene hat sich die Darstellungsvernetzung als fruchtbares Prinzip bei der Aufgabengestaltung für die Entwicklung konzeptuellen Wissens erwiesen (Prediger & Wessel, 2011). Darüber hinaus ist die Darstellungsvernetzung auch in der Hochschule eine zentrale Aktivität für die Entwicklung des Verständnisses mathematischer Konzepte, sodass wir das Prinzip der Darstellungsvernetzung auf das hochschulische Lernen übertragen und für professionsorientierte Lerngelegenheiten erweitern. Hinsichtlich des Ziels der Vernetzung lokaler und nichtlokaler Mathematik begegnen den Studierenden Darstellungen, die sich sowohl in der lokalen Mathematik als auch in der nichtlokalen Mathematik wiederfinden (siehe Beispiel in Abb. 2).

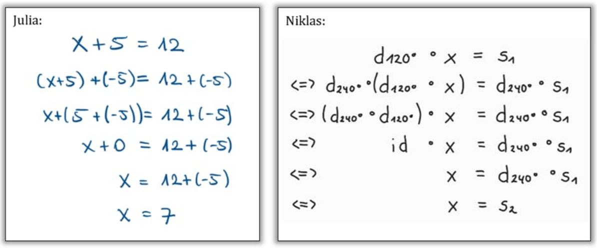

Abb. 2: Lokale und nichtlokale Darstellung am Beispiel der Gleichung

Um die Vernetzung explizit anzuregen schlagen wir die Kombination des Prinzips der *lokalen und nichtlokalen Darstellungsvernetzung* mit dem Designelement des *Kontrastierens und Vergleichens* vor. Hierbei handelt es sich um eine Lehr-Lernmethode, welche auf die Identifikation von Gemeinsamkeiten und Unterschieden abzielt (Lipowsky et al., 2019). Durch das

Kontrastieren und Vergleichen verschiedener Sachverhalte - hier lokale und nichtlokale Darstellungen (siehe Abb. 2) - können Lernprozesse angeregt werden, welche die charakteristischen Eigenschaften hervorheben (ebd.). Im Beispiel (Abb. 2) werden die Studierenden durch das Kontrastieren und Vergleichen dazu angeregt, dass Hinzufügen der (-5) und der d_{240} unter dem übergreifenden Konzept der inversen Elemente *zu vereinheitlichen*.

Ausblick

Neben der Entwicklung der Lernumgebungen ist von besonderem Interesse, welche Lernprozesse bei den Studierenden angeregt und beobachtet werden können, auf welche Hürden sie stoßen und was die Potentiale und Gelingensbedingungen der formulierten Designprinzipien sind. Zu diesem Zweck werden im SoSe 2022 Designexperimentserien (3 Sitzungen à 90 Min. mit je zwei Studierenden) durchgeführt. Alle Lernprozesse werden videographiert und transkribiert, um die individuellen Lernwege und Prozesse des Umstrukturierens („reshaping") zu rekonstruieren. Die Auswertung der Lernprozessanalyse wurde begonnen und im Vortrag werden Einblicke präsentiert.

Literatur

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 429–438.

Larsen, S. (2010). Struggling to disentangle the associative and commutative properties. *For the Learning of Mathematics, 30*(1), 37–42.

Lee, Y. (2018). *University students' school mathematics understanding and its growth in their learning of collegiate mathematics: Through the lens of a transformative transition framework.* The Pennsylvania State University.

Lipowsky, F. et al. (2019). Lernen durch Kontrastieren und Vergleichen - Ein Forschungsüberblick zu wirkmächtigen Prinzipien eines verständnisorientierten und kognitiv aktivierenden Unterrichts. In U. Steffens & R. Messner (Hrsg.), *Unterrichtsqualität: Konzepte und Bilanzen gelingenden Lehrens und Lernens* (S. 373–402). Waxmann.

Prediger, S. (2019). Theorizing in Design Research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics classrooms. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 5–27.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Relating registers for fractions–multilingual students on their way to conceptual understanding. In M. Setati, T. Nkambule & L. Goosen (Hrsg.), *Proceedings of the ICMI Study 21 - Mathematics and Language Diversity* (S. 324–333).

Wasserman, N. H. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 116–128.

Wasserman, N. H., Fukawa-Connelly, T., Villanueva, M., Mejia-Ramos, J. P. & Weber, K. (2017). Making Real Analysis Relevant to Secondary Teachers: Building Up from and Stepping Down to Practice. *PRIMUS, 27*(6), 559–578.