

Konstruktion von Beweisen durch Beispiele

Beweisen und Widerlegen von Aussagen sind wesentliche Tätigkeiten beim mathematischen Arbeiten. Häufig werden dabei allgemeingültige Argumente verwendet, insbesondere ohne dabei Beispiele zu nutzen. In manchen Fällen jedoch ist ein Beweis durch ein Beispiel möglich, z. B. bei *wahren Existenzaussagen* sowie *falschen Allaussagen*. Fehlerfreies Konstruieren von Beweisen durch Beispiel wird in solchen Fällen von Studierenden erwartet. Im Folgenden wird konkretisiert, welche Anforderungen die Konstruktion eines Beweises durch Beispiel mit sich bringt. Zudem geben wir einen Einblick in eine Untersuchung der Bearbeitungen von Mathematik-Studienanfänger*innen hinsichtlich dieser Anforderungen.

Hintergrund

Ein *Beweis durch Beispiel* liegt vor, wenn eine Allaussage durch ein Gegenbeispiel widerlegt oder eine Existenzaussage durch ein Beispiel bewiesen wird. Im Allgemeinen ist ein Beweis einer Allaussage durch Beispiel oder eine Widerlegung einer Existenzaussage durch ein Beispiel nicht möglich. In welchen Fällen welcher Beispieltyp als Beweis von Existenz- und Allaussagen (Tabelle 1) ausreichen und in welchen nicht, wird von Buchbinder und Zaslavsky in einem Modell dargestellt (Buchbinder & Zaslavsky, 2009).

Aussage	Formale Schreibweise (D : Definitionsbereich, P(x) : Prädikat)
Allaussage	$\forall x \in D: P(x)$
Existenzaussage	$\exists x \in D: P(x)$

Tab. 1: Formale Schreibweise einer All- und Existenzaussage

Im erwähnten Modell wird ein Beispiel, welches zum Definitionsbereich gehört und das Prädikat erfüllt, als *stützendes Beispiel* bezeichnet. Dieser Beispieltyp reicht zwar nicht aus, um eine Allaussage zu beweisen, jedoch genügt dieser, um eine Existenzaussage zu belegen. Ein *nicht-stützendes Beispiel* dagegen ist ein Beispiel, das zum Definitionsbereich gehört, jedoch das Prädikat nicht erfüllt. Dieser Beispieltyp reicht nicht aus, um eine falsche Existenzaussage zu widerlegen, aber er genügt, um eine falsche Allaussage zu widerlegen. Ein *irrelevantes Beispiel* ist ein Beispiel, das nicht zum Definitionsbereich gehört. Dieser Beispieltyp ist sowohl bei Existenzaussagen als auch bei Allaussagen beim Beweisen bzw. Widerlegen nicht anwendbar. Üblicherweise werden in Mathematikveranstaltungen all diese Beispieltypen nicht explizit thematisiert.

Aus der Charakterisierung der Beispieltypen lassen sich Anforderungen ableiten, die beim Konstruieren eines Beweises durch Beispiel nötig sind:

- Passung des Beispieltyps zur Aussage: Wird ein Beispiel zum Beweisen/Widerlegen eingesetzt, muss die Quantifizierung der Aussage überprüft werden, um sicherzustellen, dass der Beispieltyp des angegebenen Beispiels zum Beweisen/Widerlegen ausreichend ist.
- Passung des Beispiels zum Definitionsbereich: Ein Beispiel, das zum Beweisen/Widerlegen genutzt wird, muss zum Definitionsbereich gehören.
- Passung des Beispiels zum Prädikat: Ein Beispiel, welches zum Beweisen eingesetzt wird, muss das gegebene Prädikat erfüllen; ein Beispiel, welches zum Widerlegen eingesetzt wird, muss die Negation des gegebenen Prädikats erfüllen.

An einigen Stellen wird berichtet, dass Schüler*innen und Studierende nicht immer fehlerfrei durch ein Beispiel beweisen (z. B. Buchbinder & Zaslavsky, 2019; Stavrou, 2014). So beschreibt Stavrou (2014), dass Aussagen von manchen Studierenden mit Beispielen bewiesen werden, auch wenn diese als Beweis nicht ausreichen. Zazkis und Chernoff (2008) berichten, dass manche Studierende beim Vorlegen eines Gegenbeispiels zu einer eigenständig formulierten Aussage dieses als Ausnahme und nicht als Widerlegung der Aussage ansehen. Tirosh (2002, zitiert nach Tabach et al., 2010) zeigt, dass manche Lehrkräfte Beispiele im Fall einer Existenzaussage nicht als einen Beweis ansehen. Diese Fälle zeigen, dass manche Lernende und darunter Studierende die Anforderung hinsichtlich Passung des Beispieltyps zur Aussage nicht erfüllen. Es bleibt jedoch unklar, inwieweit die übrigen Anforderungen hinsichtlich der Passung des Beispiels zum Definitionsbereich und Prädikat von Studierenden erfüllt werden. Wir untersuchen daher folgende Forschungsfrage:

Wie erfolgreich sind Studierende beim Konstruieren von Beispielen hinsichtlich der Passung des Beispiels zum Definitionsbereich, der Passung des Beispiels zum Prädikat und der Passung des Beispieltyps zur Aussage in Abhängigkeit von verschiedenen Aussagetypen?

Methode

Im Rahmen einer Interventionsstudie zur Beispielnutzung wurden im Prä-/Posttest-Design schriftliche Bearbeitungen von Mathematik-Erstsemesterstudierenden erfasst. Ein genauer Ablauf der Studie ist bei Feil (2020) zu finden. Für den Prä-/Posttest wurden fünf Aussagenpaare verschiedener Typen (Tabelle 2) zum Themenfeld Elementare Zahlentheorie entwickelt. Die

Aussagen eines Paares waren in Versprachlichung nahezu identisch und inhaltlich ähnlich. Jedem*r Studierenden wurde jeweils eine Aussage aus den fünf Paaren im Prätest vorgelegt, die andere im Posttest. Die Studierenden hatten im Prätest acht Minuten Zeit, um für jede Aussage zu entscheiden, ob diese *wahr* / *vermutlich wahr* / *weiß nicht* / *vermutlich falsch* / *falsch* ist und ihre Entscheidung zu begründen.

Typ	Quantor	wahr/falsch	Erwartete Antwort
1	\exists	f	<i>falsch</i> ; Begründung argumentativ
2	\forall	f	<i>falsch</i> ; Gegenbeispiel
3	\exists	w	<i>wahr</i> ; Beispiel
4	\exists	f	<i>falsch</i> ; z.B. Beweis durch Betrachtung aller mögl. Beispiele
5	$\forall\exists$	w	<i>vermutlich wahr</i> / <i>weiß ich nicht</i> ; Beweis recht komplex

Tab. 2: Entwurfsschema für die Aussagenpaare

Durch die Aufforderung, die Entscheidung über die Gültigkeit der Aussage zu begründen, sollte möglichst breit erhoben werden, wie die Studierenden argumentieren. Wie bei einem Beweis durch Beispiel muss auch bei einer Begründung durch Beispiel das genutzte Beispiel zum Definitionsbereich sowie zum Prädikat passen. Auch der Beispieltyp des genutzten Beispiels muss zur Quantifizierung passen, um die Entscheidung (*wahr/falsch*) hinsichtlich des Wahrheitswertes zu begründen.

Für die Analyse der Studierendenbearbeitungen wurde deduktiv ein Kodiermanual entwickelt und nach Sichtung der Bearbeitungen induktiv ergänzt. Die Kodierung der Autorin sowie zweier weiterer Rater sehen wir mit einem Fleiss' Kappa von über 0,61 als reliabel an (Landis & Koch, 1977).

Erste Ergebnisse

Für diese Auswertung betrachten wir Bearbeitungen aller Aussagen aus dem Prätest, die in der Begründung mindestens ein Beispiel und keine allgemeingültigen Argumente enthalten. Diese Kriterien erfüllen 107 von insgesamt 240 vorliegenden Bearbeitungen.

Unter den 107 Bearbeitungen passte in 15 Fällen die Entscheidung *wahr* / *vermutlich wahr* / *vermutlich falsch* / *falsch* nicht zum Beispieltyp des angegebenen Beispiels (Nicht-Erfüllung der Passung des Beispieltyps zur Aussage). Beispielsweise wurde eine wahre Existenzaussage fälschlicherweise für *falsch* gehalten und als Begründung ein oder mehrere nicht-stützende Beispiele angegeben. Unter den 15 Fällen befinden sich 3 Bearbeitungen der Aussagen vom Typ 4. In diesen 3 Fällen passt der Beispieltyp nicht zur Aussage, weil nur *ein* nicht-stützendes Beispiel angegeben und *falsch* als Entscheidung angekreuzt wurde. Bei diesem Aussagetyp hätten alle möglichen

Fälle überprüft werden müssen, um die Aussage widerlegen zu können. In 9 der 107 Bearbeitungen wurde ein Beispiel genutzt, das nicht zum Definitionsbereich gehört (Nicht-Erfüllung der Passung des Beispiels zum Definitionsbereich). In 9 der 107 Bearbeitungen gab es ein Beispiel, das nicht zum gegebenen, sondern zu einem anderen Prädikat passte, da z. B. anstelle von einem Produkt eine Summe gebildet wurde (Nicht-Erfüllung der Passung des Beispiels zum Prädikat).

Diskussion und Ausblick

Erste Ergebnisse zeigen, dass alle drei oben beschriebenen Anforderungen nicht immer erfolgreich erfüllt werden. Positiv anzumerken ist, dass die Anzahl an Bearbeitungen mit fehlerhafter Nutzung von Beispielen recht gering ist. Die eingesetzten Aussagen waren mit Schulwissen zu verstehen und zu bearbeiten. So wurde beispielsweise mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen als Definitionsbereich gearbeitet, also mit aus der Schule lange bekannten Mengen. Offen bleibt, ob inhaltlich andere Aussagen zu einem an der Universität neu gelerntem Thema ähnlich erfolgreich bearbeitet werden würden. Untersuchungen zu dieser Frage sind der nächste logische Schritt.

Literatur

- Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2009). A framework for understanding the status of examples in establishing the validity of mathematical statements. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Hrsg.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 225–232). PME.
- Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students' understanding of the roles of examples in proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 129-147.
- Feil, L. (2020). Umgang von Studienanfängern mit quantifizierten Aussagen eine Pilotstudie. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 265–268). WTM-Verlag.
- Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *biometrics*, 33(1), 159–174.
- Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1.
- Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tirosh, D., Tsamir, P. & Dreyfus, T. (2010). Secondary school teachers' awareness of numerical examples as proof. *Research in Mathematics Education*, 12(2), 117–131. <https://doi.org/10.1080/14794802.2010.496973>
- Tirosh, C. (2002). *The ability of prospective teachers to prove or to refute arithmetic statements*. [Unpublizierte Dissertation, The Hebrew University Jerusalem].
- Zazkis, R. & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 195–208.