

Franziska FISCHER, Kiel, Henning SIEVERT, Flensburg &
Aiso HEINZE, Kiel

Welches arithmetische Wissen ist prädiktiv für den Kompetenzerwerb im Bereich Zahlen und Operationen bis zur Klassenstufe 3?

Die Leitidee Zahlen und Operationen ist im Mathematikunterricht von der ersten bis zur vierten Klassenstufe von großer Bedeutung. In den ersten beiden Klassenstufen sollen die Grundrechenarten im Zahlenraum bis 100 erlernt werden. Dazu gehören u. a. die Automatisierung der Grundaufgaben sowie das Erlernen und adaptive Nutzen verschiedener Rechenstrategien (Padberg & Benz, 2021). Verschiedene Wissensfacetten werden im Sinne des Spiralcurriculums kumulativ aufgebaut bzw. vertieft. In der hier präsentierten Studie soll die Frage untersucht werden, welches arithmetische Wissen aus den Klassenstufen 1 und 2 den Aufbau der Kompetenzen im Bereich Zahlen und Operationen zum Ende der dritten Klassenstufe beeinflusst. Dafür wurde eine Sekundäranalyse mit den längsschnittlichen Daten von 1.853 Schüler*innen aus 118 Klassen durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen einen Einfluss verschiedener arithmetischer Wissensfacetten aus den ersten zwei Klassenstufen auf die erreichten Kompetenzwerte der Leitidee Zahlen und Operationen in der landesweiten Vergleichsarbeit (VerA).

Theoretischer Hintergrund und Forschungsfrage

Am Ende der Grundschule sollen die Schüler*innen die Grundrechenarten beherrschen. Dafür müssen sie z. B. einen umfassenden Zahlbegriff entwickeln sowie Operationsvorstellungen aufbauen, die Grundaufgaben automatisiert und verschiedene Rechenstrategien erlernt haben (Schulz & Wartha, 2021). Ein wichtiger Einfluss auf die spätere Leistung im Mathematikunterricht wird auch frühen mathematischen Kompetenzen zugeschrieben, die bereits vor der Grundschule erworben und zu Beginn der ersten Klassenstufe vertieft werden. Dazu gehören der Aufbau eines umfassenden Zahlbegriffs, Zählfertigkeiten, (Quasi-)Simultanerfassung, das Verständnis der Teil-Ganzen-Beziehungen sowie der Erwerb verschiedener Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion (Benz et al., 2015).

Die Schüler*innen sollen ab der ersten Klassenstufe Zahl- und Größenvorstellungen erweitern, die im Laufe der Grundschulzeit mittels des dezimalen Stellenwertsystems auf größere Zahlenräume übertragen werden (Padberg & Benz, 2021). Um effiziente Fertigkeiten in der Addition und Subtraktion zu erlernen, müssen die Schüler*innen die anfangs genutzten Strategien des zählenden Rechnens durch ein umfassendes Repertoire an Rechenstrategien und automatisierten Aufgaben ersetzen (Baroody & Dowker, 2003; Benz,

2005; Rinkens & Eilerts, 2012). In der zweiten Klassenstufe werden aufbauend auf die Addition und Subtraktion die Multiplikation und Division erworben und auch hier Grundaufgaben automatisiert und verschiedene Rechenstrategien erlernt (Padberg & Benz, 2021).

Der im Curriculum vorgesehene Kompetenzerwerb im Laufe der ersten beiden Schuljahre kann somit stets als Weiterentwicklung aufgefasst werden, wobei verschiedene Stränge unterschieden werden können. Trotz dieser angenommenen Kompetenzentwicklung gibt es kaum Studien, die diese Entwicklung differenziert untersucht haben. Entsprechend ist eine längsschnittliche Betrachtung über mehrere Schuljahre sinnvoll. Dabei soll in einem ersten Schritt die Forschungsfrage beantwortet werden, welche arithmetischen Wissensfacetten, die in den ersten zwei Schuljahren erworben werden sollen, prädiktiv für die Kompetenzen der Leitidee Zahlen und Operationen am Ende der dritten Klassenstufe sind.

Methodisches Vorgehen

Es wurden Daten von 1.853 Schüler*innen aus 118 Klassen reanalysiert, die längsschnittlich von Schuleintritt bis zum Ende der Klassenstufe 3 erhoben wurden. Aus elf Tests über die Klassenstufen 1 und 2 lagen Daten zu verschiedenen Variablen der Leitidee Zahlen und Operationen vor. Diese wurden ergänzt um die Ergebnisse der Vergleichsarbeit VerA mit dem Schwerpunkt Zahlen und Operationen am Ende der dritten Klassestufe.

Zum Schuleintritt wurden die kognitiven und sprachlichen Fähigkeiten mittels des kognitiven Fähigkeitstest CFT und des Münsteraner Screenings ermittelt. Zusätzlich wurden frühe mathematische Kompetenzen mittels des Hamburger Rechentests bestimmt. Als Variablen zur Größenvorstellung konnten Aufgaben zum Zahlenstrahl sowie zum Größenvergleich zweier Zahlen und zweier multiplikativer Terme herangezogen werden. Für die Orientierung im Zahlenraum bis 100 und die damit verbundene Struktur des dezimalen Stellenwertsystems wurden Aufgaben zum Punktfeld und zur Hundertertafel eingesetzt. Aufgaben zu quantitativen Vergleichen bildeten einen Teil des Operationsverständnisses von Addition und Subtraktion ab, auch das Operationsverständnis der Multiplikation wurde erfasst. Weiterhin wurden Fertigkeiten zur additiven und multiplikativen Zahlzerlegung erhoben. Zu verschiedenen Testzeitpunkten finden sich Aufgaben zu den Grundrechenarten, dabei wurde auch die Beherrschung der Grundaufgaben getestet. Daneben wurden Kompetenzen zur Nutzung von Rechenstrategien erfasst. Dazu gehören das Verdoppeln und Halbieren in verschiedenen Zahlenräumen, die Nutzung operativer Beziehungen und dekadischer Analogien sowie das Bilden von Aufgabenfamilien. Mit den oben genannten Variablen wurde

ein Regressionsmodell erstellt, das unter Beachtung der Mehrebenenstruktur in Mplus berechnet wurde (Muthen & Muthen, 2017).

Ergebnisse

Von den Tests zu Schuleintritt zeigen der CFT und Hamburger Rechentest einen Einfluss auf die VerA-Ergebnisse am Ende der Klassenstufe 3, während die sprachlichen Fähigkeiten zu Schuleintritt keinen Effekt haben. Wissen über Zahlen zeigt auf die VerA-Ergebnisse einen signifikanten Effekt im Falle der Orientierung am Hunderterfeld und der Hundertertafel. Das Bestimmen von Zahlen am Zahlenstrahl und der Größenvergleich zweier Zahlen zeigen keinen signifikanten Effekt.

Als Wissensfacetten zu Addition und Subtraktion haben das Halbieren am Ende der ersten Klasse, das Verdoppeln am Ende der zweiten Klasse, die Subtraktion bis 20 sowie Addition und Subtraktion bis 100 einen signifikanten Effekt auf die VerA-Testergebnisse. Im Gegensatz dazu haben die Variablen zur Addition und dem Verdoppeln in der ersten Klasse, die additive Zahlzerlegung, das Halbieren bis 20 und bis 100, die dekadischen Analogien, operative Beziehungen, quantitative Vergleiche und das Bilden von Aufgabenfamilien keinen signifikanten Einfluss.

Von den Variablen zur Multiplikation und Division zeigt nur das kleine Einmaleins keinen signifikanten Einfluss auf die VerA-Ergebnisse. Das Operationsverständnis zur Multiplikation, die operativen Beziehungen, die multiplikative Zahlzerlegung, die Teilbarkeit einer Zahl und das kleine Einsdurch-eins zeigen einen signifikanten Effekt auf die VerA-Ergebnisse.

Fazit und Ausblick

Verschiedene arithmetische Wissensfacetten, die in den ersten zwei Schuljahren erworben werden, sind prädiktiv für die kumulativ erworbenen Kompetenzen der Leitidee Zahlen und Operationen am Ende der dritten Klassenstufe. Wie erwartet haben Fähigkeiten zu Schuleintritt Auswirkungen auf die Kompetenzen am Ende der dritten Klassenstufe (Benz et al., 2015), wobei in dieser Analyse sogar noch viele weitere Wissensfacetten, die nach Schuleintritt erworben wurden, als Prädiktoren mitmodelliert wurden.

Auffällig ist, dass die verschiedenen Variablen, die Größenvorstellungen von Zahlen abdecken, keine eigenständigen Effekte zu haben scheinen. Auch bei den Strategien zeigen sich abgesehen vom Verdoppeln bis 100 und den operativen Beziehungen zur Multiplikation/Division keine Effekte.

Interessant im Sinne einer Interpretation zum kumulativen Lernen sind Ergebnisse wie etwa zu Fertigkeiten im kleinen Einmaleins, die keinen statistischen Effekt haben. Diese Varianz könnte durch die Testwerte zum kleinen

Einsdurcheins abgedeckt sein, die signifikanten Einfluss zeigen. Ein analoges Ergebnis zeigt sich beim Addieren im Zahlenraum bis 20 und im Zahlenraum bis 100. Während das kleine Einspluseins keinen Effekt zeigt, ist dies im größeren Zahlenraum bis 100 der Fall. Interessanterweise ist es bei der Subtraktion anders. Hier zeigen die Subtraktion bis 20 und bis 100 jeweils eigenständige Effekte, sodass das Subtrahieren im größeren Zahlenraum möglicherweise von anderer Wissensqualität ist und nicht allein eine quantitative Erweiterung des Subtrahierens bis 20 darstellt.

Diese erste Analyse bildet nur ein grobes Modell ab, da alle Variablen gleichberechtigt betrachtet werden und nicht die zeitliche Abfolge sowie das komplexe Wirkungsgeflecht im Laufe zweier Schuljahre modelliert werden. Dies soll im Zuge weiterer Analysen der Kompetenzentwicklung mittels Pfadanalysen geschehen, um genauere Informationen über die Entwicklung der arithmetischen Kompetenz in der Grundschule geben zu können.

Literatur

- Baroody, A. J. & Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise*. Routledge.
- Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Franzbecker.
- Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer Spektrum.
- Muthen, L. K. & Muthen, B. O. (1998-2017). *Mplus User's Guide* (8. Aufl.). https://www.statmodel.com/download/usersguide/MplusUserGuideVer_8.pdf
- Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik. Fundiert, vielseitig, praxisnah. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II* (5. überarb. Aufl.). Springer Spektrum.
- Rinkens, H.-D. & Eilerts, K. (2012). Feldstudien zur Entwicklung der Rechenfertigkeit von Erstklässlern im Bereich der Addition. In W. Blum, R. Borromeo Ferri & K. Maaß (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (S. 265–274). Springer Spektrum.
- Schulz, A. & Wartha, S. (2021). Subtraktion und Addition. In A. Schulz & S. Wartha (Hrsg.), *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe. Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen* (S. 71–125). Springer.