Yael FLEISCHMANN, Trondheim & Emilie LYSE-OLSEN, Trondheim

Repräsentationsebenen von Eigenvektoren als Teil von Studierendenbearbeitungen in der linearen Algebra

Die lineare Algebra ist ein zentraler Teil des universitären Mathematikstudiums, der in den letzten Jahrzehnten zunehmend in die Aufmerksamkeit der didaktischen Forschung gerückt ist (Wawro et al. 2019). Die Eigentheorie, und damit das Studium von Eigenvektoren, Eigenwerten und Eigenräumen, stellt einen zentralen Lerninhalt in der linearen Algebra dar, ist jedoch konzeptionell komplex und konfrontiert Studierende mit mehreren neuen mathematischen Definitionen und Konzepten. Eigenvektoren haben dabei sowohl algebraische als auch geometrische Interpretationen, die insbesondere in niedrigen Dimensionen gut veranschaulicht werden können, sodass das Arbeiten auf unterschiedlichen Beschreibungsebenen und mit verschiedenen Repräsentationen integraler Teil des Wissenserwerbs ist (Hillel, 2000, S. 199; Wawro et al., 2019, S. 1111). Laut Wawro et al. (2018, S. 275) ist die Forschung zum Lehren und Lernen der Eigentheorie „ein relativ junges Unterfangen und noch lange nicht erschöpft". Nach Hillel (2000) wendet ein typischer Anfänger*innenkurs in der linearen Algebra mehrere Beschreibungsmodi auf Objekte und Operationen sowie die Übertragungen zwischen ihnen an. Dazu gehören der abstrakte, der algebraische und der geometrische Modus, die jeweils ihre eigenen charakteristischen Sprachen und Konzepte haben, und mit unterschiedlicher Terminologie, Notation und Repräsentationen verbunden sind. Für den *abstrakten Beschreibungsmodus* ist die Sprache formal und verwendet Konzepte aus dem verallgemeinerten *n*-dimensionalen Raum, wie Vektorraum, Dimension und Kern. Der *algebraische Modus* hingegen ist spezifischer und arbeitet mit Konzepten wie Matrizen und Rang, sowie der Lösung linearer Systeme. Der *geometrische Beschreibungsmodus* schließlich bezieht sich typischerweise auf 2- und 3-dimensionale Räume und arbeitet mit Vektoren, deren linearen Kombinationen und mit Transformationen, die die Vektoren skalieren oder unverändert lassen. Der Wechsel zwischen verschiedenen Modi ist eine der großen Herausforderungen, mit denen die Schüler*innen beim Erlernen der linearen Algebra konfrontiert sind (z. B. Sierpinska, 2000), und wird daher in der hier vorgestellten Studie adressiert.

Datenerhebung und Analysemethode

Datenerhebung: Diese Studie wurde an der Norwegian University of Science and Technology (NTNU) in Trondheim mit Studierenden im ersten und zweiten Studienjahr in einer Grundlagenveranstaltung zur linearen Algebra

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

für Mathematikstudierende (einschließlich Lehramt) durchgeführt. Die Aufgaben, deren Bearbeitungen durch die Studierenden im Rahmen dieser Studie ausgewertet werden, wurden in die wöchentlichen Hausaufgaben integriert. Hier stellen wir Analyseergebnisse zur folgenden Aufgabenstellung vor: „*Erklären Sie in Ihren eigenen Worten: Was ist ein Eigenvektor? Sie können auch Zeichnungen verwenden*". Dabei konzentrieren wir uns auf die Forschungsfrage: *Welche Repräsentationen verwenden die Studierenden, um das Konzept des Eigenvektors zu beschreiben?* In unserer Studie interessieren wir uns über die genannte Forschungsfrage hinaus für die Frage nach dem Grad an Formalität in den Antworten der Studierenden mit den Konzepten *concept image* und *concept definition* (nach Tall und Vinner, 1981).

Analysemethode: Die Antworten der Studierenden wurden in zwei Runden anhand eines thematischen Kodierungsansatzes basierend auf der Arbeit von Wawro et al. (2019, S. 1115) qualitativ analysiert. In der ersten Runde der Codierung wurden beschreibende Codes induktiv aus einzelnen Wörtern oder kurzen Sätzen in den schriftlichen Antworten der Schüler*innen konstruiert. Es folgte eine zweite Runde hinsichtlich des Grades an Formalität der gegebenen Antworten. Dies erfolgte durch einen Vergleich der Antworten der Studierenden zur formalen Definition aus dem Buch *Elementary linear algebra* von Anton, Rorres & Kaul (2020, S. 291), dem im Kurs verwendeten Lehrbuch. Die anfänglichen Darstellungscodes aus der ersten Runde wurden dann in Kategorien gruppiert, die Hillels (2000) Beschreibungsmodi entsprachen, nämlich *algebraisch*, *abstrakt* und *geometrisch.*

Ergebnisse hinsichtlich der verwendeten Repräsentationen

Die verwendeten Codes, ihre Erklärung und ihre Prävalenz in unserer Codierung sind in Tabelle 1 aufgeführt. Wir geben im Folgenden einige konkrete Beispiele aus den Studierendenbearbeitungen. Einige Antworten sind komplex, verwenden sowohl Symbole als auch natürliche Sprache oder verbinden das Konzept des Eigenvektors mit anderen Konzepten, während andere komprimierter sind. Vor diesem Hintergrund wurden einigen Antworten mehrere Codes zugewiesen, während andere nur ein oder zwei erhielten.

Algebraische Beschreibungsmodi: Hierzu zählen Antworten, die Eigenvektoren beschreiben, indem sie die symbolische Definition ähnlich der aus der Vorlesung wiedergeben, z. B. $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, wobei A die Matrix, $\boldsymbol{x}$ den Vektor und λ ein Skalar bezeichnen (die Definitionsbereiche der verwendeten Symbole, z. B. $\lambda \in \mathbb{R}$, wurden von den Studierenden i. d. R. nicht angegeben). In diese Kategorie fallen ebenso Antworten, die diese Beziehung in natürlicher Sprache, d.h. einer diskursiven Definition von Eigenvektoren, umformulieren. Zum Beispiel schrieb ein*e Studierende*r (übersetzt aus dem Norwegischen): *„Ein Vektor ist ein Eigenvektor, wenn man $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ schreiben kann, wobei A eine Matrix und λ ein Skalar ist*“.

Modus	Code und Beschreibung	Anzahl
Algebraisch	**Diskursive Definition:** Verwendung natürlicher Sprache, um die symbolische Definition aus dem Lehrbuch zu erklären, z.B. $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$	35
	Symbolische Definition: Beschreibung mit symbolischer Definition aus dem Lehrbuch $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$	31
	Lineares System: Verbindet Eigenvektoren mit der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit nicht-trivialen Lösungen.	1
	Linear: Für Ax wird die Beschreibung „linear“ verwendet.	1
Abstrakt	**Transformation:** Beschreibung im Zusammenhang mit dem Konzept der Transformation, unter Verwendung der Wörter „transformieren“, „Transformation“ etc.	15
	Erzeugnis: Beschreibung in Bezug auf das Konzept der Spanne, unter Verwendung der Wörter „erzeugen“, „Erzeugnis“ usw.	3
	Bild: Beschreibung in Bezug auf den Begriff des Bildes, unter Verwendung der Wörter „Bild“, „Abbildung“ usw.	3
	Vektorraum: Beschreibung im Zusammenhang mit dem Konzept des Vektorraums unter Verwendung der Formulierung „ein Element eines Vektorraums“ oder ähnliches.	2
	Transformationsdefinition: Beschreibung mit symbolischer Definition, aber im Sinne einer Transformation, nicht einer Matrix, zum Beispiel $T(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$	1
Geometrisch	**Skalares Vielfaches:** Beschreibung mit den Worten „skalares Vielfaches“, „Skalierung“, „skaliert“ usw.	21
	Behält die Richtung bei: Beschreiben von Eigenvektoren als Vektoren, die ihre Richtung nicht ändern.	12
	Dynamische Größenänderungen: Dynamische Beschreibung, mit den Worten „dehnen“, „schrumpfen“ usw.	5
	Abbildung: Enthält eine Figur oder Skizze.	5

Tab. 1: Codes und Häufigkeiten der unterschiedlichen Repräsentationsmodi in den Studierendenbearbeitungen (*n=52*)

Abstrakte Beschreibungsmodi: Antworten, die Eigenvektoren mit Konzepten aus dem allgemeineren Teil der Theorie in Beziehung setzen, wurden dem abstrakten Beschreibungsmodus zugeordnet. Tabelle 1 zeigt, dass diesen Codes im Vergleich zu den Codes, die dem algebraischen Modus entsprechen, weniger Antworten zugewiesen wurden. Von den abstrakten Codes ist die „Transformation“ die am häufigsten wiederkehrende innerhalb des Datenmaterials.

Geometrische Beschreibungsmodi: In diese Kategorie fallen Beschreibungen, die sich auf eine visuelle Darstellung in einem geometrischen Beschreibungsmodus bezogen oder geometrische Betrachtungen enthielten. Dazu gehören Antworten, die Eigenvektoren als richtungserhaltend beschreiben oder unter auf eine Skalierung verweisen, sowie Antworten mit einer Skizze, die die Beziehung zwischen der Matrix, dem Eigenvektor und dem Eigenwert zeigt. Die folgende Antwort enthält sowohl die Konzepte „Transformation", „Bild" und „Vektorraum" aus dem formaleren und allgemeineren Teil der Theorie (abstrakter Beschreibungsmodus) also auch die Formulierungen „keine Richtungsänderung" und „skalares Vielfaches", aus dem geometrischen Modus: *„Ein Eigenvektor ist ein Vektor im Vektorraum, der seine Richtung nicht ändert, wenn er durch eine lineare Transformation abgebildet wird. Dies bedeutet, dass, wenn eine quadratische Matrix mit diesem Vektor multipliziert wird, der resultierende Vektor ein skalares Vielfaches des Eigenvektors ist*".

Diskussion und Ausblick

Der Zweck dieser Studie ist es, mehr Einblick in die Beschreibungen von Eigenvektoren durch die Studierenden zu erhalten. Am häufigsten finden wir den algebraischen Beschreibungsmodus, welcher aus der Vorlesung und dem Lehrbuch am besten bekannt sein dürfte. Nur wenige Studierende verwendeten eine Skizze, obwohl dies in der Aufgabenstellung ausdrücklich vorgeschlagen wurde. Um in Zukunft mehr Einblick in das *concept image* der Studierenden zu erhalten, planen wir die Entwicklung von Aufgaben, die sich explizit mit Veränderungen zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen befassen, und werden Interviews zum Verständnis der Eigentheorie durchführen.

Literatur

Anton, H., Rorres, C. & Kaul, A. (2020). *Elementary linear algebra: Applications version* (12. Aufl.). University of Chicago Press.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Hrsg.), *On the teaching of linear algebra* (S. 191–207). Wiley.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Hrsg.), *On the Teaching of Linear Algebra* (S. 209–246). Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169. //doi.org/10.1007/BF00305619

Wawro, M., Zandieh, M. & Watson, K. (2018). Delineating Aspects of Understanding Eigentheory through Assessment Development. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N. M. Hogstad (Hrsg.), *INDRUM 2018* (S. 275–284). University of Agder; INDRUM.

Wawro, M., Zandieh, M. & Watson, K. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM Mathematics Education*, *51*, 1111–1123. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-018-01022-8