Daniel FROHN, Bielefeld

Grundvorstellungen in der analytischen Geometrie: Skalare Multiplikation, Skalarprodukt, Vektorprodukt

Schon in der Sekundarstufe I müssen im Rahmen der Zahlbereichserweiterungen Grundvorstellungen zur Multiplikation ständig erweitert werden. Die Multiplikation ist nur für natürliche Faktoren als wiederholte Addition interpretierbar, während für ganze, rationale und reelle Zahlen als Faktoren geometrische Vorstellungen an Bedeutung gewinnen (Spiegelung, Streckung, Stauchung). In der Sekundarstufe II werden dann im Rahmen der analytischen Geometrie zwei weitere Produkte eingeführt: Die skalare Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor und das Skalarprodukt zweier Vektoren. Beide lassen sich als Verallgemeinerungen des Produktes reeller Zahlen auffassen, und in beiden Fällen müssen vorhandene Grundvorstellungen erweitert bzw. neue adäquate Grundvorstellungen aufgebaut werden. In Leistungskursen wird zusätzlich häufig noch ein drittes Produkt in der Vektorrechnung betrachtet: Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt), welches im Unterschied zu den anderen Produkten nur im dreidimensionalen reellen Vektorraum definiert werden kann.

Grundvorstellungen in der analytischen Geometrie

Lernprozesse in der analytischen Geometrie erfordern einen ständigen Wechsel von algebraischen in geometrische Darstellungsformen und umgekehrt. Durch adäquate Grundvorstellungen können abstrakte algebraische Konzepte verschiedene geometrische Bedeutungen erhalten. Am Beispiel des grundlegenden Begriffs „Vektor“ kann dies verdeutlicht werden: In algebraischer Darstellung ist ein Vektor ein Tripel reeller Zahlen, welches aber viele unterschiedliche geometrische Interpretationen als Punkt, Ortsvektor, Verschiebung bzw. Pfeilklasse (Menge von gleichlangen gleichgerichteten Pfeilen) erlaubt (Malle, 2005). Ziel dieses Beitrags ist es, die für die verschiedenen Produkte in der analytischen Geometrie relevanten Grundvorstellungen normativ zu beschreiben und auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu untersuchen. Dies soll als Orientierungsrahmen für die Organisation von Lernprozessen in der analytischen Geometrie dienen.

Grundvorstellungen zur skalaren Multiplikation

Die skalare Multiplikation knüpft als Vervielfachung eines Vektors direkt an die Grundvorstellungen zur Multiplikation reeller Zahlen an. Aus den natürlichen Zahlen ist die *Grundvorstellung der wiederholten Addition* bekannt, und diese kann auch auf den Spezialfall der Multiplikation eines Multiplikators $n \in \mathbb{N}$ mit einem Multiplikanden $a \in \mathbb{R}$ verallgemeinert werden:

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

$n \cdot a = a + \cdots + a$. Das Kommutativgesetz in $\mathbb{R}$ erlaubt zwar indirekt auch eine entsprechende Deutung von $a \cdot n$, jedoch ist direkt hier keine sinnvolle Interpretation als wiederholte Addition möglich. Diese unterschiedlichen Rollen von Multiplikator und Multiplikand, die in den reellen Zahlen meist kaum wahrgenommen werden, treten nun bei der skalaren Multiplikation offen zutage, da es sich um Elemente aus unterschiedlichen Bereichen handelt: Der Multiplikator ist eine reelle Zahl und der Multiplikand ein Vektor.

Auch im allgemeinen Fall muss bei der geometrischen Deutung der Multiplikation reeller Zahlen dieser Unterschied beachtet werden: Der Multiplikator wird als Streck- bzw. Stauchfaktor interpretiert, während der Multiplikand das Objekt ist, auf welches die zentrische Streckung wirkt. In den positiven reellen Zahlen kommt man dabei noch mit der Vorstellung einer Strecke ohne Orientierung aus, aber bei der Einbeziehung negativer Faktoren bietet das Pfeilmodell der Zahlengeraden den geeigneten Rahmen (Fast & vom Hofe, 2014). Diese Überlegungen zeigen, dass letztlich schon bei der Multiplikation mit negativen Zahlen eine skalare Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor aus $\mathbb{R}^1$ eingeführt wird und dabei die *Grundvorstellung der zentrischen Streckung* angelegt werden sollte, die dann auch für den Fall der skalaren Multiplikation tragfähig ist.

Zu beachten ist, dass die Grundvorstellung der zentrischen Streckung sowohl innerhalb der Koordinaten des Vektors in Gestalt der Multiplikation reeller Zahlen als auch für den Vektor als Ganzes Anwendung findet. Da in den einzelnen Koordinaten auf das Pfeilmodell der Zahlengeraden (als Projektionen auf die jeweiligen Achsen) zurückgegriffen wird, liegt für den Vektor als Ganzes ebenfalls die geometrische Deutung als Pfeil (Ortsvektor bzw. Pfeilklasse) nahe.

Grundvorstellung	**Multiplikation in $\mathbb{R}$**	**Skalare Multiplikation**
Wiederholte Addition	$n \cdot a = a + \cdots + a$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$	$n \cdot \vec{a} = \vec{a} + \cdots + \vec{a}$ $(n \in \mathbb{N}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3)$
Zentrische Streckung	$t \cdot a$ $(t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R})$ Streckung für $\lvert t\rvert \geq 1$ Stauchung für $\lvert t\rvert < 1$ Spiegelung für $t < 0$	$t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \\ ta_3 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3)$ Streckung/Stauchung und ggf. Spiegelung - in den Koordinaten - für den ganzen Vektor

Grundvorstellungen zum Skalarprodukt und zum Vektorprodukt

Orientiert an der ausführlicheren Darstellung von Grundvorstellungen zum Skalarprodukt in Frohn (2020) werden nun Grundvorstellungen zum Vektorprodukt beschrieben und mit denen beim Skalarprodukt verglichen.

Grundvorstellung	Skalarprodukt	Vektorprodukt
Produktvorstellung (verallgemeinertes Produkt)	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ Produkteigenschaften: - Distributivität - Kommutativität	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ Produkteigenschaften: - Distributivität - **Anti**kommutativität (!)
Orthogonalitätsvorstellung	Skalarprodukt = 0 genau dann, wenn die Vektoren orthogonal sind	Vektorprodukt orthogonal zu beiden (nicht parallelen) Vektoren
Winkelvorstellung	Betrag des Skalarprodukts ist bei parallelen Vektoren am größten Skalarprodukt positiv bei spitzen Winkeln, negativ bei stumpfen Winkeln	Betrag des Vektorprodukts ist bei orthogonalen Vektoren am größten, bei parallelen Vektoren am kleinsten (= 0) Rechte-Hand-Regel
Projektionsvorstellung	Skalarprodukt hängt bei konstantem orthogonalen Anteil nur vom parallelen Anteil ab	Vektorprodukt hängt bei konstantem parallelen Anteil nur vom orthogonalen Anteil ab
Flächeninhaltsvorstellung	Betrag des Skalarprodukts als Rechtecksflächeninhalt (Produkt der Länge eines Vektors mit der Länge des Projektionsvektors)	Betrag des Vektorprodukts als Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

Mit der *Produktvorstellung* kann das Skalarprodukt als verallgemeinertes Produkt reeller Zahlen angesehen werden (Beispiel: „Menge mal Stückpreis gleich Gesamtpreis“ für eine „Einkaufsliste“). Ungewöhnlich ist nur, dass das Ergebnis als Skalar in einem anderen Bereich als die Faktoren liegt.

Beim Vektorprodukt ist das Ergebnis dagegen wieder ein Vektor und es gilt auch das Distributivgesetz $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (aber *nicht* das Kommutativgesetz wegen $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$). Darüber hinaus erinnert beim Vektorprodukt jedoch nur noch wenig an ein gewöhnliches Produkt, so dass die *Produktvorstellung* hier eine untergeordnete Rolle spielt.

Das Skalarprodukt kann gut durch die Fragestellung „*Wann sind zwei Vektoren orthogonal?*" eingeführt werden, während das Vektorprodukt eine Antwort auf die Frage „*Wie findet man einen zu zwei gegebenen Vektoren orthogonalen Vektor?*" gibt. Bei beiden Produkten ist also eine *Orthogonalitätsvorstellung* zentral.

Mit der *Winkelvorstellung* können qualitative Zusammenhänge zwischen dem eingeschlossenen Winkel der beiden Vektoren und dem Betrag des Skalar- bzw. Vektorprodukts beschrieben werden. Diese geometrischen Deutungen umfassen mehr als den rechnerischen Umgang mit den Formeln $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ bzw. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$; sie beinhalten z.B. auch Interpretationen eines negativen Skalarprodukts und der Orientierung des Vektorprodukts gemäß der Rechten-Hand-Regel.

Vermöge der *Projektionsvorstellung* kann eine sehr starke Analogie zwischen Skalar- und Vektorprodukt hergestellt werden. Schreibt man $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$ mit einem zu $\vec{a}$ parallelen Anteil $\vec{b}_{\parallel}$ bzw. orthogonalen Anteil $\vec{b}_{\perp}$, so ergibt sich beim Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_{\parallel}$ und beim Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp}$. Die Tatsache, dass nur einer der beiden Anteile einen Einfluss auf das jeweilige Produkt hat, ist besonders für Anwendungen in der Physik relevant (Arbeit, Drehmoment).

Die *Flächeninhaltsvorstellung* spielt mangels Anwendungen beim Skalarprodukt keine große Rolle, während sie beim Vektorprodukt eine praktische Methode zur Berechnung von Parallelogrammflächeninhalten erlaubt.

Ein ausführlicherer Beitrag zu den Grundvorstellungen in der analytischen Geometrie mit unterrichtspraktischen Bezügen erscheint in Frohn (in Vorb.).

Literatur

Fast, M. & vom Hofe, R. (2014). Geometrisch wird's anschaulich. Das Pfeilmodell als Vorstellungsbasis für negative Zahlen. *mathematik lehren, 183*, 20–24.

Frohn, D. (2020). Mehr als Orthogonalität. Das Skalarprodukt anwenden – mit Grundvorstellungen. *mathematik lehren, 218*, 33–38.

Frohn, D. (in Vorb.). Grundvorstellungen zu Produkten in der analytischen Geometrie. *mathematik lehren, 236.*

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *mathematik lehren, 133*, 8–14.