

Christine GÄRTNER, Berlin & Moritz HERZOG, Wuppertal

## **Zum Stellenwertverständnis von Lehramtsstudierenden – anderes System, ähnliche Schwierigkeiten?**

In den vergangenen Jahren konnten einige Studien zeigen, dass das Verständnis des Stellenwertsystems Lernende vor teils große Herausforderungen stellt (u.a. Moser Opitz, 2007; Ross, 1989). Dabei beschränken sich die Schwierigkeiten nicht nur auf den Primarbereich, sondern erstrecken sich auch über die Sekundarstufe (Moser Opitz, 2007) bis hin zu Lehramtsstudierenden (Krämer, 2012). Besondere Bedeutung erhält das Stellenwertverständnis auch durch die prädiktive Bedeutung für Mathematikleistungen (Herzog & Fritz, 2020; Moser Opitz, 2007).

### **Schwierigkeitserhöhende Merkmale von Stellenwertaufgaben**

Mit dem Ziel, den Erwerb eines Stellenwertverständnisses in der Primarstufe zu strukturieren, konnten verschiedene Studien ähnliche schwierigkeiterhöhende Merkmale von Stellenwertaufgaben identifizieren (Herzog et al., 2019; Ross, 1989). Wesentliche schwierigkeiterhöhende Merkmale sind demnach die Relation der Stellenwerteinheiten, die symbolische Darstellung der Stellenwerteinheiten und der Einbezug höherer Stellenwerte über den Hunderter hinaus. Dabei sind die schwierigkeiterhöhenden Merkmale nicht allein isoliert zu betrachten, sondern können auch in Kombination auftreten.

Als ein wesentlicher erster Schritt beim Erwerb eines Stellenwertverständnisses können die Kenntnis und korrekte Zuordnung der Stellenwerte zu den Ziffern einer Zahl betrachtet werden (Herzog et al., 2019; Ross, 1989). Bei diesem Verständnis des Positionsprinzips (jede Ziffer repräsentiert eine Stellenwerteinheit) werden die Stellenwerte jedoch noch nicht in Bezug gesetzt. Vor allem die Relation der Stellenwerte – etwa die Gleichwertigkeit von 10 Einern und einem Zehner – ist in diesem Verständnis nicht enthalten, jedoch von großer Bedeutung, da sie die Grundlage für das Verständnis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung ist (Gerster & Schultz, 2004). Dementsprechend erweisen sich Aufgaben, die ein Umbündeln oder Entbündeln von Stellenwerten erfordern, in empirischen Studien als systematisch deutlich schwieriger (Herzog et al., 2019; Ross, 1989).

Stellenwerte und ihre Relationen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden. Grundsätzlich können nicht-symbolische (z.B. Mehrsystemblöcke) und symbolische Darstellungsweisen (z.B. Stellenwerttafel mit Ziffern) unterschieden werden (Herzog et al., 2019; Scherer & Moser Opitz, 2010). Wesentlicher Unterschied ist, dass die Relation der Stellenwerteinheiten bei nicht-symbolischen Darstellungen explizit verifizierbar ist – z.B.

durch Nachzählen – während sie bei symbolischen Darstellungen abstrakt beherrscht werden muss. In Untersuchungen weisen Aufgaben, in denen Stellenwertrelationen symbolisch dargestellt werden, höhere Schwierigkeitswerte auf (Herzog et al., 2019).

Einige viel rezipierte Studien betrachten den Erwerb eines Stellenwertverständnisses im Zahlenraum bis Hundert, also begrenzt auf Zehner und Einer (für einen Überblick s. Herzog et al., 2019). Gleichzeitig weisen Scherer und Moser Opitz (2010, S. 210) darauf hin, dass erst die „Bündelung dritter Ordnung“ (Zehner zu Hundertern) zu einem wirklichen Verständnis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung führe. Herzog et al. (2019) berichten, dass unabhängig von der Darstellung (symbolisch oder nicht-symbolisch) die Relation von Einern und Zehnern Lernenden leichter fiel als die Relation zwischen größeren Stellenwerteinheiten.

### **Stellenwertverständnis im Lehramtsstudium**

Bisherige Studien haben in erster Linie das Stellenwertverständnis innerhalb des Dezimalsystems bei Lernenden betrachtet. Mit Blick auf die universitäre Lehramtsausbildung erscheint der Wechsel des Zahlensystems als geeignete Lerngelegenheit, um angehende Lehrkräfte für die inhaltlichen Hürden bei der Vermittlung eines Stellenwertverständnisses zu sensibilisieren (Brandt et al., 2017). In diesem Kontext kommt der Frage, in welchem Maße die schwierigkeits erhöhenden Aufgabenmerkmale des Stellenwertverständnisses beim Transfer in ein anderes Zahlensystem bei Lehramtsstudierenden erhalten bleiben, eine wesentliche Rolle zu.

### **Methode**

An der Studie nahmen 631 Grundschullehramtsstudierende aus zwei Jahrgängen (2. und 4. Fachsemester) teil. Davon wurden mit den 306 Studierenden des 4. Fachsemesters bereits im Rahmen ihrer Lehramtsausbildung verschiedene Stellenwertsysteme und das Rechnen in diesen behandelt. Die 325 Studierenden des 2. Fachsemesters hatten keine oder wenig Erfahrung mit anderen Stellenwertsystemen. Mit Hilfe eines Onlinetests wurde das Stellenwertverständnis im Sechssystem in Anlehnung an Herzog et al. (2019) mit insgesamt 40 Items erfasst. Hierzu wurde zu jedem Item, das Herzog et al. (2019) im Dezimalsystem entwickelt hatten, eine parallele Version im Sechssystem erstellt. Anschließend an die Erfassung wurden die Daten dichotom kodiert und mit Hilfe eines Raschmodells analysiert, bei dem für jedes Item ein spezifischer Schwierigkeitswert berechnet wird.

## Ergebnisse und Diskussion

Hinsichtlich der Item-Infitwerte liegen alle Items im akzeptablen Bereich von  $1 \pm 0.3$  (Wright & Linacre, 1994). Zudem beträgt die Modell-Reliabilität .99, sodass von einer präzisen Anordnung der Items auf der Raschskala auszugehen ist (Linacre, 2019).

Der Großteil der Items besitzt erwartungskonforme Schwierigkeitswerte. Damit bestätigt sich, dass die schwierigkeits erhöhenden Aufgabenmerkmale, die bereits im Dezimalsystem beobachtet werden konnten, auch in anderen Stellenwertsystemen zu finden sind. Einzelne Items weichen jedoch hinsichtlich ihrer Schwierigkeitswerte von den Erwartungen ab.

Hierbei fällt auf, dass alle Items, bei denen aus verschiedenen Zahlen die größte Zahl jeweils identifiziert werden soll, unabhängig von Zahlenraum und Darstellungsart (ikonisch oder symbolisch) deutlich leichter sind als erwartet. Eine Rolle könnte hierbei spielen, dass bei drei von vier dieser Items durch Ignorieren des Sechzersystems und Interpretation im Dezimalsystem die richtige Lösung gefunden werden kann. Ferner zeigen sich – anders als im Dezimalsystem – keine systematischen Unterschiede zwischen Addition und Subtraktion. Das Rechnen wird erschwert oder erleichtert abhängig davon, ob ein „Sechserübergang“ vorliegt oder nicht. Zudem besitzen Items, bei denen ein Entbündelungsprozess erforderlich ist, um eine nicht-ikonische symbolische Darstellung zu erzeugen, nicht nur im dreistelligen Zahlenraum hohe Schwierigkeitswerte. Hieraus kann geschlossen werden, dass das Bündeln und Entbündeln besondere schwierigkeits erhöhende Merkmale in anderen Stellenwertsystemen darstellen, Rechenoperationen hingegen nicht.

Um zu überprüfen, ob die Items signifikant unterschiedliche Itemschwierigkeiten für die beiden Studierendenjahrgänge haben, wurde ein Waldtest durchgeführt. Insgesamt zeigen 13 von 40 Items signifikante Unterschiede. Betrachtet man diese 13 Items, werden alle Items, die weniger schwierigkeits erhöhende Merkmale besitzen, von dem Jahrgang, der bereits unterschiedliche Stellenwertsysteme in ihrer universitären Ausbildung behandelt hatte, besser gelöst. Auch das mentale Addieren und Subtrahieren im Sechzersystem fällt diesen Studierenden leichter. Das Ergänzen von nicht-kanonischen symbolischen Darstellungen, bei denen entbündelt werden muss, genauso wie der Größenvergleich von nicht-kanonischen symbolischen Darstellungen fallen ihnen jedoch schwerer. Ein Grund hierfür könnte sein, dass diese Studierenden durch ihr spezifisches Vorwissen um die Bündelung im Sechzersystem und die Betonung des Sechzersystems in diesen Items für die Systemunterschiede sensibilisiert sind und aufwändigere Strategien (z.B. Umwandeln ins Dezimalsystem) nutzen, obwohl diese Aufgaben auch ohne Beachtung der Basiszahl lösbar sind.

Für die Lehramtsausbildung bedeutet die Ähnlichkeit der schwierigkeits erhöhenden Merkmale in unterschiedlichen Stellenwertsystemen, dass der Wechsel der Basiszahl eine geeignete Lerngelegenheit ist, um Schwierigkeiten mit dem Stellenwertverständnis zu erarbeiten und adäquate Fördergelegenheiten für Schüler\*innen zu entwickeln. Die differentiellen Itemschwierigkeiten für Studierende unterschiedlicher Fachsemester legen nahe, dass Studierende mit vertieften Kenntnissen vor allem auf das Umrechnen zwischen Stellenwertsystemen fokussieren und weniger auf deren strukturelle Gemeinsamkeiten. In dieser Frage sind weitergehende Untersuchungen zur Rezeption fachwissenschaftlicher Veranstaltungen im Lehramtsstudium wünschenswert.

## Literatur

- Brandt, J., Gutscher, A. & Selter, C. (2017). Nutzung von Vignetten in einer Großveranstaltung für Mathematikstudierende der Primarstufe. In C. Selter, S. Hußmann, C. Höble, C. Knipping, K. Lengnink & J. Michaels (Hrsg.), *Diagnose und Förderung heterogener Lerngruppen: Theorien, Konzepte und Beispiele aus der MINT-Lehrerbildung* (S. 235–256). Waxmann.
- Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Pädagogische Hochschule Freiburg. <https://phfr.bszbw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf>
- Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2019). Development of a sustainable place value understanding. In A. Fritz, V. Haase & P. Räsänen (Hrsg.), *The international handbook of mathematical learning difficulties. From the Laboratory to the Classroom* (S. 561–580). Springer.
- Herzog, M. & Fritz, A. (2020). Konzeptuelles Stellenwertverständnis als Prädiktor für Rechenfertigkeiten. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 421–424). WTM-Verlag.
- Krämer, J. (2012). „14.057, das sind 7 Einer, 50 Zehner und 14 Tausender“ – (Fehl-)Vorstellungen von Studierenden zum Bündelungsprinzip in Stellenwertsystemen. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 489–492). WTM-Verlag.
- Linacre, J. M. (2019). *Reliability and separation of measures. Help for Winsteps Rasch Measurement and Rasch Analysis Software*. <https://www.winsteps.com/winman/reliability.htm>.
- Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Haupt.
- Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value. A developmental view. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 47–51.
- Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Wright, B. D. & Linacre, J. M. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions*, 8(3), 370.