Alexander GOLDSCHMIDT, Dortmund & Susanne PREDIGER, Dortmund

Doppelter Zahlenstrahl als Zugang zu Proportionalem Denken bei besonderen Schwierigkeiten in Mathematik

Hintergrund: Lernende mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in der Sekundarstufe 1

Lernende mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (mbSM) sind Lernende, die beim Erwerb zentraler Inhalte des Fachs Mathematik schwerwiegende und langanhaltende Schwierigkeiten aufweisen. Diese sind häufig durch fehlendes (konzeptuelles) Verständnis von Verstehensgrundlagen aus der Grundschule verursacht und wirken sich auch auf die Lernprozesse in der Sekundarstufe aus (Gaidoschik et al., 2021). Für Grundschul-Inhalte sind verstehensförderliche Zugänge und Darstellungen für *Lernende mbSM* bereits gut untersucht, dabei nehmen die graphischen Darstellungen sowohl die Funktion als *Lernhilfe* als auch als *Begründungshilfe* im Verstehensaufbau ein (Gaidoschik et al., 2021). Für die Sekundarstufe dagegen gibt es weiteren Entwicklungs- und Forschungsbedarf für *Lernende mbSM*.

Einer der für die Sek I zentralen Inhalte ist proportionales Denken, es ist sowohl Voraussetzung für das Verständnis vieler mathematischer Inhalte als auch von hoher Alltagsrelevanz. Zwar wurden mögliche Schwierigkeiten beim proportionalen Denken gut untersucht (Im & Jitendra, 2020; Lamon, 2007), es gibt jedoch wenige Studien, wie das Thema auch für *Lernende mbSM* zugänglich gemacht werden kann, z.B. mit dem doppelten Zahlenstrahl. Dazu sind sowohl die Verstehenselemente im aktuellen Stoff als auch die Verstehensgrundlagen aus vorangehenden Jahrgängen zu thematisieren (Ademmer & Prediger, 2019). Unser Design-Research-Projekt fragt daher:

Inwiefern kann ein Zugang mit dem doppelten Zahlenstrahl bei Lernenden mbSM das Verständnis im proportionalen Denken fördern?

Doppelter Zahlenstrahl als verstehensförderliche Darstellung

Üblich in deutschen Schulbüchern sind für proportionales Denken vor allem tabellarische Darstellungen, die jedoch für den oft als schwer herausgearbeiteten Übergang von additiven zu multiplikativen Strategien (Im & Jitendra, 2020) wenig Verstehenshilfe bieten. Dagegen erscheint der doppelte Zahlenstrahl für den Aufbau von Verständnis vom proportionalen Denken besser geeignet (Küchemann et al., 2011), insbesondere um den Aufbau und die Verknüpfung folgender von uns spezifizierter Verstehenselemente zu fördern: Koordination zweier Größen, Zählen in Schritten, Zählen in doppelten Schritten, Multiplikation als Zählen in Schritten, flexibles Hoch- und Runterrechnen mit Multiplikation/Division sowie Zuordnung mit festem Faktor.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Methodischer Rahmen des Design-Research-Projekts

Das vermutete Potential des doppelten Zahlenstrahls wird im Rahmen eines Design-Research-Projekts untersucht, in der eine iterativ entwickelte Lernumgebung bzgl. der individuellen Lernwege analysiert wird. In zwei Zyklen wurden Designexperimente durchgeführt und videographiert; mit insgesamt zehn Lernenden-Paaren, die von ihren Lehrkräften als *Lernende mbSM* eingestuft wurden, einigen wurde zudem der Förderschwerpunkt Lernen attestiert. Die Designexperimente umfassten 2-6 Sitzungen pro Paar, insgesamt 33 Sitzungen à ca. 40 Minuten (ca. 1320 Minuten Videomaterial). Hinzu kamen ca. 80 Minuten explorative Erkundungen am doppelten Zahlenstrahl mit zwei Lernenden im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung.

Das Videomaterial wurde gesichtet und ausgesuchte Stellen zur detaillierten Analyse transkribiert. Die qualitativen Analysen codierten sowohl die o.a. Verstehenselemente (ZiS / ZidS für Zählen in (doppelten) Schritten, MZiS für Multiplizieren als Zählen in Schritten, KzG für Koordination zweier Größen), als auch die Nutzung des doppelten Zahlenstrahls (LH für *Lernhilfe*, BH für *Begründungshilfe*).

Empirische Einblicke in Verstehensprozesse von Lernenden mbSM

Das Transkript setzt ein, nachdem die Lernenden bereits intensiv in doppelten Schritten gezählt haben. Es wurde am doppelten Zahlenstrahl dargestellt und verbalisiert; in der Aufgabe in Abb. 1 zur Koordination der Größen Zeit und Strecke z.B. durch „Ich habe für jeden 3er Schritt einen 5er Schritt gezählt. Insgesamt sind es 18 3er-Schritte und 18 5er-Schritte“. Die Aufgabe 1 zielt auf den Übergang vom Zählen zum Multiplizieren ab, eingeleitet durch die Frage nach einem schnelleren Rechenweg.

Aufgabe 1
Jonas hat eine Aufgabe mit dem doppelten Zahlenstrahl gelöst (in blau).
a) Wie könnte er schneller zum Ergebnis kommen?
b) Zeige mit Pfeilen am doppelten Zahlenstrahl, wie du rechnest.
c) Finde eine passende Rechnung.

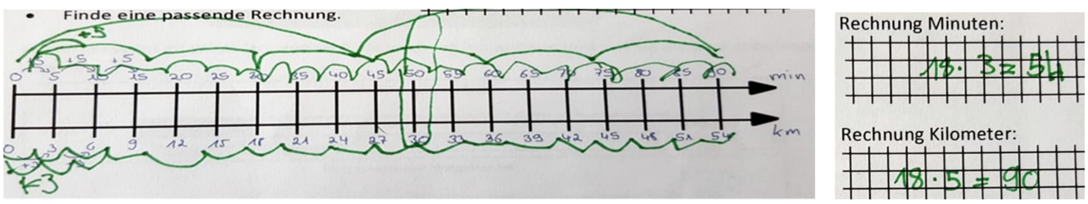

Abb. 1: Aufgabe zum Übergang vom Abzählen der doppelten Schritte (in blau vorgegeben) zum Multiplizieren als Zählen in Schritten (von Ben ergänzt in grün)

Das Transkript 1 zeigt, wie Ben und Luca einen schnelleren Lösungsweg durch Vergröbern der Schritte auf dem doppelten Zahlenstrahl finden:

8	Ben	Ja! Man kann einfach so machen, zum Beispiel so, und so [*zeichnet Bögen, die jeweils drei Schritte zu einem größeren Schritt zusammenfassen*].	ZiS; LH
10	Ben	Dreierschritte.	ZiS; LH
11	Luca	[*Zeichnet zwei 45er-Bögen*]	LH
20	Luca	Weil es die Hälfte ist.	

Ben fasst jeweils drei (zuvor von ihm eingezeichnete) 5er-Schritte zu 15er-Schritten zusammen und bezeichnet die drei 5er-Schritte als Dreierschritte (T. 8). Luca dagegen bildet zwei 45er-Schritte durch Halbieren (T. 11). Beide entwickeln die Idee des flexiblen Bündelns durch ihre Handlungen am doppelten Zahlenstrahl (Zeichnen von Bögen als Zusammenfassung kleinerer Bögen) selbstständig. In dieser Flexibilisierung des Verstehenselements ZiS nutzen sie den doppelten Zahlenstrahl als *Lernhilfe*. Der Übergang zur Multiplikation ist damit sehr gut vorbereitet.

Der Übergang gelingt Luca unmittelbar, nachdem die Formulierung von achtzehn 5er-Schritten und achtzehn 3er-Schritten prägnant zusammengefasst wurde (T. 33). Das weitere Transkript zeigt, wie Ben den doppelten Zahlenstrahl als *Begründungshilfe* nutzt:

30	Leh	Insgesamt sind das achtzehn 3er-Schritte und	ZiS prägnant verbalisiert
31	Luca	Achtzehn 5er-Schritte	
32	Leh	Könnte euch da eine Rechnung zu einfallen?	
33	Luca	18 mal 5?	MZiS
…			
45	Ben	Weil da das gleiche Ergebnis rauskommt.	Ergebnisgleichheit
46	Leh	Mhm. Okay. Kann man das auch am Zahlenstrahl sehen, warum das das Gleiche ist?	BH
47	Ben	Ja, hier. 5 plus 5 plus 5 und dann weiter hoch [*fährt Schritte am oberen Zahlenstrahl nach*], immer 3 hoch [*fährt Schritte am unteren Zahlenstrahl nach*].	KzG, ZidS verknüpft mit MZiS
48	Leh	Und woher weiß man, dass man das 18-mal machen muss?	
49	Ben	[*zählt*] 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, *[atmet hörbar ein und tippt mit dem Finger*], 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. 18.	ZidS, MZiS BH

Ben begründet zunächst rein symbolisch über die Ergebnisgleichheit von $18 \cdot 5$ und 5+5+5+… und ebenso für $18 \cdot 3$ (T. 45). Unklar bleibt, ob er die Multiplikation an dieser Stelle bereits mit dem Verstehenselement ZiS verknüpft. Auf die Frage der Lehrkraft, wie man dies am doppelten Zahlenstrahl begründen kann (T. 46), greift Ben jedoch direkt auf das ZiS zurück. Er adressiert dabei gestisch alle relevanten Verstehenselemente für den Übergang zur Multiplikation: Koordination zweier Größen (KzG, gestisch/deiktisch durch Nachfahren der Schritte, T. 47), die Schrittlängen beider Größen (T. 47) als auch auf Nachfrage (T. 48) die Schrittanzahl (T. 49). Ben ist in der Lage, durch die Nutzung des doppelten Zahlenstrahles sein konzeptuelles Wissen aus dem ZiS und MZiS zu nutzen, um daraus eine inhaltlich tragfähige Begründung für den Übergang zur Multiplikation abzuleiten, indem er sie für beide Größen jeweils verknüpft. Der doppelte Zahlenstrahl dient ihm dabei als *Begründungshilfe* und konzeptuelle Stütze.

Fazit und Ausblick

Die kurzen Einblicke in die Analysen zeigen, dass *Lernende mbSM* mit dem doppelten Zahlenstrahl relevante Verstehenselemente des proportionalen Denkens konstruieren oder wachrufen können. Aufbauend auf diesem konzeptuellen Verständnis können sie sich neue Verstehenselemente des proportionalen Denkens erschließen, sie begründen und mit anderen Verstehenselementen verknüpfen. Sie nutzen den Zahlstrahl dabei sowohl als *Lern-* (Transkript 1) als auch als *Begründungshilfe* (Transkript 2). Dies sehen wir als ersten Indikator, dass der doppelte Zahlenstrahl ein hohes Potential für verstehensförderliche und sogar flexible Zugänge zum proportionalen Denken bieten kann. Die Analyseeinblicke deuten allerdings auch darauf hin, dass eine verständnisförderliche Lernumgebung explizite Begründungs- und Vernetzungsanlässe anbieten muss, um Voriges zu gewährleisten und die zugrundeliegende Lernumgebung diesbezüglich weiterer Optimierung bedarf.

Literatur

Prediger, S. & Ademmer, C. (2019). Gemeinsam zum Volumen von Quadern: Eine inklusive und sprachsensible Unterrichtsreihe. *Mathematik lehren, 214*, 13–18.

Im, S.-H. & Jitendra, A. K. (2020). Analysis of proportional reasoning and misconceptions among students with mathematical learning disabilities. *Journal of Mathematical Behavior, 57*, 1–20. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100753

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematic teaching and learning*. (S. 629–667). Macmillan.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 111S.*

Küchemann, D., Hodgen, J. & Brown, M. (2011). Models and representations for the learning of multiplicative reasoning: Making sense using the Double Number Line. In C. Smith (Hrsg.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 31*(1), 85–90.