

Gilbert GREEFRATH, Münster, Katrin VORHÖLTER,  
Hamburg/Paderborn, Hans-Stefan SILLER, Würzburg &  
Gabriele KAISER, Hamburg/Bodø

## **Diskrete Modelle als Potenzial beim mathematischen Modellieren**

Diskrete Mathematik und mathematische Modellierung haben viele Verbindungen. Wir beschreiben im Rahmen einer Fallstudie Modellierungsaktivitäten mit Lernenden am Ende der Sekundarstufe I. Die Lösungsprozesse der Lernenden für dieses graphentheoretische Optimierungsproblem werden beschrieben und ihr Vorgehen wird anhand der Phasen des Modellierungskreislaufs mit der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse untersucht. Die Analyse erlaubt es, die Verbindung der erforderlichen Modellierungsteilkompetenzen mit der diskreten Mathematik herauszuarbeiten.

## **Verbindende Aspekte von diskreter Mathematik und mathematischer Modellierung**

Die Verknüpfung von diskreter Mathematik und mathematischer Modellierung birgt für den Mathematikunterricht ein großes Potenzial. Der Einsatz von Methoden der diskreten Mathematik ermöglicht einen breiteren - und zum Teil weniger formalen - Zugang zur Arbeit mit mathematischen Modellen. Für unterschiedliche didaktische Ansätze des mathematischen Modellierens und der diskreten Mathematik für den Mathematikunterricht können verbindende didaktische Aspekte auf verschiedenen Ebenen identifiziert werden.

Eine dieser Ebenen ist inhaltlicher Art: „The power of discrete mathematics lies in mathematical modeling [...]“ (Hart & Martin, 2018, S. 5). Dabei wird gerade in diskreten Modellen das besondere Potenzial beim Modellieren gesehen (James & Wilson, 1986). Die fortschreitende technische Entwicklung stellt eine weitere Ebene dar. Um die Funktionsweise von Computern und deren Anwendungen zu verstehen, sind Kenntnisse in diskreter Mathematik erforderlich (Greefrath et al., 2022; Pollak, 2007).

Eine dritte Ebene ist die Diskussion der Wahl diskreter Modelle im Kontext von Modellierungsprozessen. So stellen James und Wilson (1986) beim Modellieren mit diskreten Modellen eine größere Nähe zu den realen Problemen verglichen mit kontinuierlichen Methoden fest. Die diskrete Mathematik kann aber auch zur Modellierung kontinuierlicher Strukturen genutzt werden und so einen neuen Blick auf bestimmte Sachverhalte ermöglichen (Ouvrier-Buffer, 2020).

Die tatsächliche Nutzung diskreter Modelle könnte möglicherweise von den zur Verfügung stehenden mathematischen Methoden abhängen. Insgesamt ist festzustellen, dass es nur sehr wenige empirische Ergebnisse zum Modellieren mit diskreten Modellen gibt und dass diese auf kleineren Fallstudien beruhen (Sandefur et al., 2022). Hier zeigt sich also Forschungsbedarf zur tatsächlichen Nutzung diskreter Ansätze bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen (Greefrath et al., 2022).

### **Forschungsfragen und Ziele der Studie**

Untersuchungen zum Modellieren diskreter Probleme werden als Perspektive für die didaktische Forschung gesehen (Ouvrier-Buffer, 2020). Wir interessieren uns für einen detaillierten Blick auf die von Lernenden verwendeten Konzepte diskreter Mathematik bei der Bearbeitung diskreter Modellierungsprobleme, und zwar in unserem Fall eingeschränkt auf die Verwendung von Graphen. Konkret verfolgen wir folgende Forschungsfrage:

Inwiefern und in welchen Teilschritten des Modellierungsprozesses verwenden Lernende bei der Arbeit an Modellierungsaufgaben Konzepte mit Bezug zu Graphen?

### **Methodik**

Die Datengrundlage bilden Videoaufnahmen von 8 Schülerinnen einer 9. Jahrgangsstufe (Alter 14-15 Jahre) eines Hamburger Gymnasiums. Die Schülerinnen bearbeiteten in zwei Kleingruppen zu jeweils vier Personen digital mithilfe eines Videokonferenztools eine Modellierungsaufgabe im Rahmen von virtuell durchgeführten Projekttagen. Aufgabe der Schülerinnen war es, in einem gegebenen Stadtgebiet eine optimale Tour für die Stadtreinigung auszuarbeiten. Die Arbeitsphase an diesem komplexen Modellierungsproblem umfasste 9 Zeitstunden, aufgeteilt auf zwei Schultage. Gruppe 1 hat insgesamt 6:57 Stunden an der Aufgabe gearbeitet, Gruppe 2 8:37 Stunden. Dabei konnte man Touren für die Müllbeseitigung, das Abholen der Laubsäcke und Weihnachtsbäume und die Schneeräumung unterscheiden. Während ihrer Arbeit wurden die Schülerinnen von zwei Studentinnen, die im Rahmen von Masterseminaren vorbereitet worden waren, betreut. Diese Aktivitäten wurden videographiert.

Für die Auswertung der Daten wurde die inhaltlich strukturierende Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2014) genutzt. Die Möglichkeit zur Berücksichtigung des empirischen Materials im Auswertungsprozess bietet gleichzeitig die notwendige Offenheit für die Berücksichtigung neuer Kategorien. Diese Szenen der Videos wurden nach dem Inhaltlich-semantische Transkriptionssystem

nach Dresing und Pehl (2018, S. 20 ff.) transkribiert und gemeinsam mit Experten konsensuell in einem deduktiv-induktiven Kodierungsprozess kodiert (Kodierschema s. Greefrath et al., 2022).

## **Ergebnisse**

In Gruppe 1 konnten während der typischerweise ersten Phase des Modellierens, dem Verstehen, keine Bezüge zu Graphen rekonstruiert werden. Stärker waren diese Bezüge beim Vereinfachen festzustellen. Hier konnte die Nutzung unterschiedlicher Aspekte rekonstruiert werden (Durchlaufsinne, Start- und Endpunkt, Teilgraph), die zwar später nicht mehr explizit verwendet wurden, aber dennoch offensichtlich Eingang in die Lösung gefunden haben. Das Mathematisieren geschah mit der Nutzung von vier unterschiedlichen Unterkategorien mit Bezug zu Graphen. Insbesondere die Effektivität des Durchlaufens der Kanten ohne Dopplungen und Auslassungen wurde ab dem Mathematisieren durchgängig in allen folgenden Teilschritten identifiziert. Beim Validieren wurden in dieser Gruppe unterschiedliche Konzepte mit Bezug zu Graphen thematisiert. Ein wichtiger Aspekt neben der Effektivität war die Unterkategorie Komplexität des Graphen. Sie wurde in vier verschiedenen Teilschritten des Modellierens festgestellt.

In Gruppe 2 waren in drei Teilschritten des Modellierens, nämlich im Verstehen, Vereinfachen und Interpretieren, keine Konzepte mit Bezug zu Graphen rekonstruierbar. Auffällig viele Bezüge zu Graphen sind beim mathematischen Arbeiten und auch beim Mathematisieren festzustellen. Das mathematische Arbeiten ist mit allen Codes zu Graphen (außer Auslassungen und Übertragbarkeit) verbunden. Besonders zentral sind beim mathematischen Arbeiten die Effektivität und der Start- und Endpunkt.

## **Diskussion und Fazit**

Die Analyse der Zusammenhänge der Modellierungsteilschritte und der Konzepte mit Bezug zu Graphen zeigt Unterschiede zwischen den Gruppen. So wird deutlich, dass die Bezüge zu Graphen weniger beim Verstehen auftraten, sondern im späteren Verlauf der Bearbeitung. Während in Gruppe 1 in allen Teilschritten des Modellierungsprozesses Bezüge zu Graphen rekonstruiert werden konnten, war dies in Gruppe 2 primär beim mathematischen Arbeiten der Fall. Insgesamt traten die Bezüge bei Gruppe 2 deutlicher zum Vorschein und beeinflussten den Bearbeitungsprozess. Diskussionen um Start- und Endpunkt hätten auch aus inhaltlicher Sicht Potenzial für weitergehende Erkenntnisse gehabt. Eine ebenso wichtige Unterkategorie ist die der Metrik, da hier verschiedene Teilschritte des Modellierens in Verbindung stehen.

Die dargestellte Fallstudie zeigt, obwohl graphentheoretische Überlegungen nicht in den Mathematikcurricula enthalten sind, dass entsprechende Modellierungsprobleme ein besonderes Potenzial bieten, substanzielle mathematische Überlegungen anzuregen. Unsere Untersuchung zeigt, dass intensive und unterschiedliche Modellierungsprozesse angeregt und durchgeführt wurden. Die verwendete Problemstellung konnte außerdem die Schülerinnen über einen längeren Zeitraum motivieren, mathematisch zu arbeiten. Daher schließen wir, dass das mathematische Modellieren eine Chance bietet, einen neuen Blick auf Inhalte der diskreten Mathematik für die Schule zu richten und interessante Modellierungsprobleme zu integrieren.

## Literatur

- Dresing, T., & Pehl, T. (2018). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse: Anleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende* (8. Aufl.). [www.audiotranskription.de/praxisbuch](http://www.audiotranskription.de/praxisbuch)
- Greefrath, G., Siller, H.-S., Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2022). Mathematical modelling and discrete mathematics: Opportunities for modern mathematics teaching. *ZDM – Mathematics Education*, 54(4), 865–879. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01339-5>
- Hart, E. W., & Martin, W. G. (2018). Discrete mathematics is essential mathematics in a 21st century school curriculum. In E. W. Hart & J. Sandefur (Hrsg.), *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research* (S. 3–19). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4_1)
- James, D. J. G., & Wilson, M. A. (1986). Continuous and Discrete Techniques in Mathematical Modelling. In J. S. Berry, D. N. Burghes, I. D. Huntley, D. J. G. James, & A. O. Moscardini (Hrsg.), *Mathematical modelling methodology, models and micros* (S. 130–141). Ellis Horwood.
- Kuckartz, U. (2014). *Qualitative text analysis: A guide to methods, practice & using software*. SAGE.
- Ouvrier-Buffet, C. (2020). Discrete mathematics teaching and learning. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of mathematics education* (S. 227–233). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_51](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_51)
- Pollak, H. O. (2007). Mathematical modelling—A conversation with Henry Pollak. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and applications in mathematics education* (S. 109–120). Springer US. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1\\_9](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_9)
- Sandefur, J., Lockwood, E., Hart, E., & Greefrath, G. (2022). Teaching and learning discrete mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 54(4), 753–775. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01399-7>