

Pia-Angelina HAEGER, Dortmund

Vorerfahrung von Lernenden der 4. Klasse zur Anteilbestimmung bei Aufgaben zur Grundvorstellung Bruch als Teil

Bruchzahlen sind in den Lehrplänen der Primarstufe in Deutschland ausschließlich im Kontext „Größen“ curricular verankert (z. B. MSB, 2021a). Die eigentliche Einführung erfolgt erst im Verlauf der Sek I (z. B. MSB, 2021b). In anderen Ländern, wie den Niederlanden (SLO, 2019), Österreich (BMUKK, 2012), Australien (acara, 2015) oder England (DfE, 2013), erfolgt die Einführung auch außerhalb des Kontextes „Größen“ bereits in der Primarstufe. Ausgangspunkt bilden in der Regel die Alltagserfahrungen der Lernenden. Auch wenn Bruchzahlen in Deutschland im Mathematikunterricht der Grundschule eher am Rande thematisiert werden, konnte in TIMSS 2015 gezeigt werden, dass die für Deutschland curricular nicht validen Aufgaben, die zum Großteil Aufgaben zum Umgang mit Bruchzahlen enthalten, nur zu einer nicht signifikanten Verbesserung der Leistungsmittelwerte und einer geringfügigen Verbesserung des Rangplatzes führen (Selter et al., 2016). Dies deutet darauf hin, dass die Lernenden in Deutschland bereits vor der systematischen Einführung von Bruchzahlen über, zumindest teilweise, tragfähige Grundvorstellungen der Bruchzahlen verfügen. Gleichzeitig konnte in verschiedenen Studien gezeigt werden, dass der Umgang mit Bruchzahlen und die Bruchrechnung Lernenden vielfach Schwierigkeiten im Verlauf der Sek I bereiten (u. a. Streefland, 1986; Wittmann, 2006; Wartha, 2007). Aus diesem Grund sollten Lernprozesse, auch über die Einführung hinaus, anschaulich sein und an bereits vorhandene Vorstellungen der Lernenden anknüpfen, um das inhaltliche Denken zu fördern (Prediger, 2009).

Bruchzahlverständnis

In Anlehnung an das Zahlverständnis im Zahlbereich der natürlichen Zahlen, zeichnet sich ein tragfähiges Bruchzahlverständnis durch die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen, die Fähigkeit zur Vernetzung von Darstellungen sowie die Nutzung von Zahl- und Aufgabenbeziehungen aus (in Anlehnung an Selter & Zannetin, 2018).

Grundvorstellungen beschreiben die „Beziehung zwischen Mathematik, Individuum und Realität“ (vom Hofe, 1992, S. 347), bei deren Entwicklung der mathematische Inhalt mit den individuellen Vorstellungen der Lernenden verknüpft werden sollte (vom Hofe, 1992; vom Hofe & Blum, 2016). Eine zentrale Grundvorstellung der Bruchzahlen ist die Grundvorstellung „Bruch als Teil“ mit den drei Teilvorstellungen „Bruch als Teil eines Gan-

zen“, „Bruch als Teil einer Menge“ und „Bruch als Teil eines Teils“ (in Anlehnung an Malle, 2004; Schink, 2013; Padberg & Wartha, 2017). Liegt die Teilvorstellung „Bruch als Teil eines Ganzen“ zugrunde, wird ein kontinuierliches Ganzes in n gleichgroße Stücke zerlegt und entsprechend der Aufgabenstellung verteilt oder aufgeteilt. Ein mögliches Anschauungsmodell ist das Modell eines ungeschnittenen Blechkuchens. Bei der Teilvorstellung „Bruch als Teil einer Menge“ wird eine diskrete Menge gleichartiger Objekte, beispielsweise Gummibärchen, oder eine diskrete Menge erzeugt aus einem oder mehreren kontinuierlichen Ganzen, beispielsweise Kuchenstücke eines geschnittenen Blechkuchens, verteilt oder aufgeteilt.

Durch die *Vernetzung verschiedener Darstellungen* (u. a. Wessel, 2015) können Rückschlüsse auf die Vorstellungen der Lernenden zur Anteilbestimmung und -benennung geschlossen, und beurteilt werden, inwiefern die Vorstellungen tragfähig sind. Ikonische oder symbolische Darstellungen und Handlungen können im Lösungsprozess verschiedene Funktionen auf zwei Ebenen einnehmen. Als Lösungshilfe unterstützen sie verschiedene Lösungsansätze, indem beispielsweise in Zeichnungen verschiedene Möglichkeiten ausprobiert und überarbeitet werden können. Damit dienen sie auch als Gedankenstütze, indem Zwischenschritte festgehalten und für den weiteren Lösungsprozess nutzbar gemacht werden können. Auf der zweiten Ebene dienen sie als Beschreibungs- und Argumentationshilfe, um eigene Lösungsansätze zu verdeutlichen und zu strukturieren (Wessel, 2015).

Die Einsicht in und die *Nutzung von Zahl- und Aufgabenbeziehungen* ermöglicht den Lernenden Lösungsstrategien zu antizipieren und diese geschickt in Abhängigkeit des Zahlenmaterials und der Zielsetzung der Aufgabenstellung zu wählen. Für die Bestimmung von Anteilen bedeutet dies, dass die Lernenden im Verlauf des Lernprozesses Einsicht gewinnen, welche Auswirkungen beispielsweise die Gesamtanzahl der Stücke eines Kuchens bei gleichbleibender Personenanzahl oder die Veränderung der absoluten Größe des Kuchens auf den Anteil hat, den jede Person bekommt. Außerdem kann die Einsicht in Beziehungen zwischen Anteilen helfen, Lösungsstrategien zu übertragen, wenn weniger gebräuchliche Anteile bestimmt werden sollen.

Untersuchungsdesign

Zentrales Forschungsinteresse des hier vorgestellten Dissertationsprojekts ist die Erhebung der Strategien von Lernenden der vierten Jahrgangsstufe vor der Einführung von Bruchzahlen im Unterricht zur Bestimmung von Anteilen, am Beispiel diskreter und kontinuierlicher rechteckiger Anschauungsmodelle. Da das Vorwissen und individuelle Lösungsstrategien den Ausgangspunkt für die Einführung neuer Inhalte im Unterricht bilden sollten,

fordern die Bildungsstandards für den Primarbereich: „der Mathematikunterricht [...] greift die frühen mathematischen Alltagserfahrungen der Kinder auf, vertieft und erweitert sie und entwickelt aus ihnen grundlegende mathematische Kompetenzen. Auf diese Weise wird die Grundlage für das Mathematiklernen in den weiterführenden Schulen [...] geschaffen“ (KMK, 2005, S. 6). Im Rahmen des Projekts soll mithilfe qualitativer Einzelinterviews erhoben werden, über welche Vorerfahrungen und Lernvoraussetzungen die Lernenden verfügen. In einer Pilotierung sowie zwei Erhebungszyklen wurden bisher die Zusammenhänge zwischen der Art des Anschauungsmodells, der zugrundeliegenden Grundvorstellung der Bruchzahlen und den Anteilbestimmungs- und Anteilbenennungsstrategien der Lernenden erhoben. Die Aufgabensets nutzen den Blechkuchen bzw. mehrere rechteckige Mini-Kuchen als Anschauungsmodell und fokussieren verschiedene operative Veränderungen, unter anderem die Einteilung des Kuchens, die Anzahl an Personen, den zu bestimmenden Anteil, die Anzahl oder Größe der Kuchen).

Erste Ergebnisse zeigen, dass die Kinder in Abhängigkeit zur Aufgabenstellung, dem zugrundeliegenden Anschauungsmodell und den zugrundeliegenden Grundvorstellungen verschiedene Anteilbestimmungsstrategien nutzen, wobei verteilende, aufteilende und multiplikative Anteilbestimmungsstrategien unterschieden werden können (in Anlehnung an Charles & Nason, 2000). So wird der Kuchen beispielsweise gezielt entsprechend der Anzahl der Personen (n) in n Stücke zerlegt, sodass jede Person ein Stück, also $\frac{1}{n}$ des Kuchens erhält. Handelt es sich um ein diskretes Anschauungsmodell, also einen bereits geschnittenen Kuchen bei dem die Gesamtanzahl der Stücke einem Vielfachen der Anzahl der Personen entspricht, so werden entweder mehrere Stücke einzeln betrachtet oder als Einheit zusammengefasst.

Die Anteilbenennung folgt in der Regel auf die Anteilbestimmung. Neben tragfähigen Strategien, wie der automatisierten Benennung des Anteils durch eine Bruchzahl oder die Benennung durch die Bestimmung des Verhältnisses zwischen der Anzahl der Stücke pro Person und der Gesamtanzahl der Stücke, werden auch Fehlvorstellungen bzw. nicht tragfähige Vorstellungen, wie die Annahme, dass ein Teil eines Ganzen immer $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ ist, deutlich (erweitert u. a. in Anlehnung an Charles & Nason, 2000; Lamon, 1996).

Literatur

- Charles, K. & Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational studies in Mathematics*, 43, 191–221.
- Lamon, S. T. (1996). The Development of Unitizing: Its Role in Children's Partitioning Strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170–193.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, 123, 4–8.

- Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). (2021a). *Lehrpläne für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_PS/ps_lp_sammelband_2021_08_02.pdf
- Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.). (2021b). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gesamtschule/Sekundarschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Entwurf Verbändebeteiligung* https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SI/verbaende/gesk/gesk_m_klpenwurf_vb_2021_10_22.pdf
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum.
- Prediger, S. (2009). Verstehen durch Vorstellen. In L. Hefendehl-Hebeker, T. Leuders & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 166–175). Cornelsen.
- Schink, A. (2013). *Flexibler Umgang mit Brüchen. Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem*. Springer Fachmedien.
- Selter, C., Walter, D., Heinze, A., Brandt, J. & Jentsch, A. (2016). Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In H. Wendt, W. Bos, C. Selter, O. Köller & D. Kaspar (Hrsg.), *TIMSS 2015. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 79–136). Waxmann.
- Selter, C. & Zannetin, E. (2018). *Mathematik unterrichten in der Grundschule*. Kallmeyer.
- Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.). (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Wolters.
- Streefland, L. (1986). Über die N-Verführer in der Bruchrechnung und Maßnahmen zu ihrer Bekämpfung. *MU*, 3, 45–52.
- vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13(4), 345–364.
- vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen“ as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematikdidaktik*, 37, 225–254.
- Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchung zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Franzbecker.
- Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff*. Springer Spektrum.
- Wittmann, G. (2006). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen – auch für leistungsschwache Schüler? Eine mehrperspektivische Interviewstudie zu Lösungsprozessen, Emotionen und Beliefs in der Hauptschule. *Mathematica didactica*, 29(2), 49–74.
- Die Literaturverweise der Lehrpläne können bei der Verfasserin angefordert werden.