

Solveig JENSEN, Osnabrück, Hedwig GASTEIGER, Osnabrück, Miriam LÜKEN, Bielefeld & Andrea PETER-KOOP, Bielefeld

## **Schwierigkeiten beim „Entbündeln“ und „Erweitern“: Erste Aufgabenanalysen im Rahmen einer Vergleichsstudie**

### **Theoretischer Hintergrund und Ziel**

Für die schriftliche Subtraktion gibt es verschiedene Verfahren, die sich in zwei Aspekten unterscheiden: Zum einen kann die stellenweise Differenzbildung durch Abziehen oder durch Ergänzen vorgenommen werden. Zum anderen wird mit der Notwendigkeit eines Stellenübergangs – wenn beim ziffernweisen Abziehen/Ergänzen der Ziffernwert im Minuenden kleiner ist als im Subtrahenden – unterschiedlich umgegangen. Hier gibt es die Möglichkeit zum Auffüllen (in diesem Beitrag nicht thematisiert), zum Erweitern und zum Entbündeln. Üblicherweise wird das Erweitern mit dem Ergänzen und das Entbündeln mit dem Abziehen kombiniert. Die Wahl eines Verfahrens liegt in vielen Bundesländern – z.B. Niedersachsen und Nordrhein-Westfalen – auf Seiten der Lehrkräfte. Für den Entscheidungsprozess können verschiedene Argumente herangezogen werden. Ein Argument wäre, sich auf die Fehleranfälligkeit und spezifische Schwierigkeiten der Verfahren zu beziehen, die sich durch die verschiedenen Techniken bei einem Stellenübergang ergeben. So werden beim Erweitern bei einem kleineren Ziffernwert im Minuenden als im Subtrahenden gleichzeitig an der aktuellen Stelle zehn Bündelungseinheiten im Minuenden sowie an der nächsthöheren Stelle im Subtrahenden eine Bündelungseinheit hinzugefügt. Als spezifische Schwierigkeiten werden besonders Stellen in Aufgaben beschrieben, an denen eine Bündelungseinheit im Subtrahenden hinzugefügt werden muss, wenn dort keine Ziffer steht (leere Stelle) oder wenn dort eine 0 oder eine 9 vorhanden ist (und dementsprechend die eine Bündelungseinheit mit 0 Bündelungseinheiten oder mit 9 Bündelungseinheiten verrechnet werden muss). Des Weiteren besteht beim Erweitern die Gefahr, dass mit dem Verfahren nicht lösbare Aufgaben (Minuend kleiner Subtrahend) nicht als solche erkannt werden, weil der Blick auf die ganzen Zahlen durch das Verändern der einzelnen Stellen verloren gehen kann (Gerster, 2012; Kühnhold & Padberg, 1986; Jensen & Gasteiger, 2019). Beim Entbündeln wird im Falle eines kleineren Ziffernwertes im Minuenden als im Subtrahenden an der nächsthöheren Stelle im Minuenden eine Bündelungseinheit entnommen und entbündelt, sodass sich dort die Anzahl um eins verringert. Die entstandenen zehn Bündelungseinheiten werden zur aktuellen Stelle hinzugefügt, sodass man dort abziehen oder ergänzen kann. Bei diesem Verfahren entstehen besonders

viele Fehler beim Entbündeln bei Null, bei Eins und wenn mehrere Übergänge hintereinander nötig sind (Cox, 1974; Brown & VanLehn, 1980; Jensen & Gasteiger, 2019). Schwierigkeiten, die beide Verfahren betreffen, sind leere Stellen, gleiche Ziffern nebeneinander, Nullen im Minuenden/Subtrahenden und gleiche Ziffern übereinander (beim höchsten Stellenwert und nach einem Übergang/Übertrag; Jensen & Gasteiger, 2019).

Inwieweit sich die spezifischen Schwierigkeiten tatsächlich auf die Fehleranfälligkeit der Verfahren auswirken – unabhängig von der Qualität des Unterrichts oder den individuellen Stärken und Schwächen der Kinder – muss erst untersucht werden, um Argumente für die Verwendung des einen oder des anderen Verfahrens ableiten zu können. Dazu findet derzeit in einem Kooperationsprojekt der Universitäten Bielefeld und Osnabrück eine vergleichende Studie unter Kontrolle des Unterrichts statt. Die ersten Analysen bereits vorliegender Daten ermöglichen eine Einsicht dahingehend, ob sich Schwierigkeiten als solche bestätigen lassen, auch wenn sie im Unterricht explizit thematisiert wurden.

### **Studiendesign**

Insgesamt 23 Lehrkräfte (OS: 11, BI: 12) führten von den Autorinnen geplanten Unterricht zum Ergänzen mit Erweitern (im Folgenden „EE“, 10 Lehrkräfte in 12 Klassen,  $n=188$ ) und dem Abziehen mit Entbündeln (im Folgenden „AE“, 13 Lehrkräfte in 13 Klassen,  $n=214$ ) durch. Die Unterrichtsreihe umfasst neun Unterrichtsstunden und ist verständnisorientiert angelegt. Sie adressiert u.a. in einer Unterrichtsstunde spezifische Schwierigkeiten (EE: Übertrag zur Null, zur Neun und in eine leere Stelle, AE: Entbündeln bei Null). Während der Unterrichtseinheit wurden auch Aufgaben thematisiert, die den Blick der Kinder auf die ganzen Zahlen lenken sollten (z.B. „Kann-das-stimmen“-Aufgaben zum vorherigen Abschätzen des Ergebnisses). In einem Pretest wurde die Mathematikleistung (HRT – Heidelberger Rechentest), die Intelligenz (CFT) und eine Vorkenntniserhebung zu spezifischen Grundlagen für beide Verfahren durchgeführt. Der Pretest dient dazu, die Vergleichbarkeit der Stichproben AE und EE zu prüfen. Die Pretest-Daten werden derzeit noch ausgewertet. Nach Durchführung des Unterrichts wurde ein Nachtest durchgeführt, wobei zum aktuellen Zeitpunkt die Datenerhebung noch nicht in allen teilnehmenden Klassen abgeschlossen ist. Der Nachtest enthält u.a. 16 schriftliche Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000, die bzgl. aller genannten Schwierigkeiten ausbalanciert wurden. Für die Auswertung des Nachtests wurde zunächst mit richtig/falsch bzw. nicht bearbeitet kodiert. Zwei nicht lösbare Aufgaben (Minuend < Subtrahend) wurden als richtig gelöst kodiert, wenn das Kind deutlich macht, dass es diese Aufgaben für nicht lösbar hält (z.B. „kann man nicht rechnen“,

„geht nicht“) oder speziell bei diesen Aufgaben kenntlich macht, dass sie ihm besonders erscheinen (z. B. „kann ich nicht“). Für die erste Auswertung wurde innerhalb der Verfahrensgruppen analysiert, welche Aufgaben bzw. Aufgabengruppen nach Schwierigkeitsmerkmalen besonders häufig falsch/fehlerhaft bearbeitet wurden. Dabei wurden die zwei Aufgaben mit Minuend kleiner Subtrahend zu einer Aufgabengruppe zusammengefasst, eine weitere Aufgabengruppe besteht aus zwei Aufgaben mit dem Schwierigkeitsmerkmal „Merkzahl zur Null“ (für EE angenommene Schwierigkeit). Die weiteren Aufgaben werden separat in den Vergleich einbezogen.

### **Vorläufige Ergebnisse**

Durchschnittlich werden 13,03 von 16 Aufgaben richtig bearbeitet. Nach Auswertung der bislang vorliegenden Nachttests (ca. 85% der Stichprobe) unterscheiden sich die beiden Gruppen AE und EE aktuell im Gesamtergebnis signifikant, wobei die Daten zukünftig durch die sich in der Erhebung befindenden Nachttests ergänzt werden. Außerdem steht eine Prüfung der Vergleichbarkeit der beiden Versuchsgruppen auf Basis der Pretests noch aus. In beiden Gruppen erwiesen sich im Wesentlichen dieselben Aufgaben als schwierig, die Reihenfolge der Lösungsquoten unterscheidet sich jedoch bei beiden Gruppen. Die Gruppe EE hat die größten Schwierigkeiten bei der Aufgabengruppe „Minuend kleiner Subtrahend“, während bei der Gruppe AE zwei der vier Aufgaben mit zwei Stellenübergängen am schlechtesten gelöst werden (812–738 und 705–387). Die Aufgaben „Minuend kleiner Subtrahend“ folgen dann in der Gruppe AE in den Lösungsquoten, während in der Gruppe EE hier die beiden Aufgaben mit zwei Stellenübergängen folgen, die in Gruppe AE am schlechtesten gelöst wurden. Es folgen in beiden Gruppen zwei weitere Aufgaben mit zwei Stellenübergängen und die Aufgabe 503–242, die die Schwierigkeit „Null im Minuenden“ enthält.

Die höchste Lösungsquote hat bei Gruppe EE die Aufgabe ohne Stellenübergänge sowie Schwierigkeitsmerkmale, es folgt die Aufgabengruppe mit „Merkzahl zur Null“, danach folgen die drei weiteren Aufgaben ohne Stellenübergänge in den Lösungsquoten. In der Gruppe AE sind es die vier Aufgaben ohne Stellenübergänge, die am besten gelöst werden, gefolgt von einer Aufgabe mit einem Stellenübergang ohne weitere Schwierigkeitsmerkmale.

### **Diskussion**

Die erste Auswertung des Nachttests bestätigt nur einige der angenommenen Schwierigkeiten. Bei beiden Verfahren werden die nicht lösbaren Aufgaben vergleichsweise schlecht gelöst, wobei diese Schwierigkeit bei der Gruppe EE mehr ins Gewicht fällt als andere Schwierigkeiten. Bei der Gruppe AE werden zwei Aufgaben mit zwei Stellenübergängen am schlechtesten gelöst,

die offensichtlich schwieriger zu sein scheinen als die zwei anderen Aufgaben mit zwei Stellenübergängen. Das hängt möglicherweise bei 705–387 mit der Null im Minuenden (von der entbündelt werden muss) und bei 812–738 von zwei gleichen Ziffern untereinander an der höchsten Stelle nach dem Stellenübergang zusammen. Diese Merkmale könnten erklären, warum diese zwei Aufgaben auch für die Gruppe EE schwieriger zu lösen waren als die restlichen Aufgaben. Eine systematische Untersuchung der Schwierigkeitsmerkmale nach abgeschlossener Datenerhebung und unter Beachtung der Ausgewogenheit der Stichproben ist hier allerdings abzuwarten.

### **Ausblick**

Der Unterricht wird aktuell in den letzten vier Klassen durchgeführt, sodass Daten aus weiteren Nachtests die vorliegenden Daten vervollständigen. Des Weiteren ist eine Überprüfung der Ausgewogenheit der Stichproben anhand der Ergebnisse von HRT und CFT geplant sowie eine Analyse der Vorkenntnisse der Schüler\*innen bzgl. der Konzepte, die in den beiden Verfahren jeweils aufgegriffen werden (Bündelungsprinzip und Konstanz der Differenz). Zur Überprüfung allgemeiner und spezifischer Schwierigkeitsmerkmale werden nach Prüfung der Ausgeglichenheit der Stichproben die Lösungsquoten für Aufgabengruppen mit gleichem Schwierigkeitsmerkmal nochmals verglichen, um zu ermitteln, ob bestimmte Schwierigkeiten bei einem Verfahren zu mehr Fehlern führen als beim anderen. Darüber hinaus wird im Nachtest und ergänzend in Interviews das Verständnis des jeweiligen Verfahrens erhoben. Für das vierte Schuljahr ist ein weiterer Nachtest geplant, sodass ein umfassender Vergleich der Verfahren bzgl. Fehleranfälligkeit sowie Verständnis direkt nach dem Unterricht und nach einem halben Jahr möglich sein wird.

### **Literatur**

- Brown, J. S. & VanLehn, K. (1980). Repair theory: a generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4(4), 379–426.
- Cox, L. S. (1974). *Analysis, classification, and frequency of systematic error computational patterns in the addition, subtraction, multiplication, and division vertical algorithms for grades 2–6 and special education classes*. Kansas University. [https://archive.org/details/ERIC\\_ED092407](https://archive.org/details/ERIC_ED092407)
- Gerster, H.-D. (2012). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie*. WTM.
- Kühnhold, K. & Padberg, F. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 3, 6–16.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative vergleichende Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematikdidaktik*, 40, 135–167.