

Kira KARRAS, Münster & Karina HÖVELER, Münster

Inhaltlich-anschauliche Beweisprozesse angehender Grundschullehrkräfte

Theoretischer Hintergrund

Die in den Bildungsstandards formulierten Kompetenzanforderungen zum mathematischen Argumentieren (KMK, 2004) sollen bereits Grundschulkin-der u.a. auf das Beweisen vorbereiten und dieses anbahnen. Für Grundschul-lehrkräfte ist daher die Unterstützung Lernender beim Aufbau und bei der Entwicklung von Argumentationskompetenzen eine wesentliche professi-onsbezogene Kompetenz, die die Fähigkeit, selbst Beweise führen zu können voraussetzt. In der Grundschule werden dabei insbesondere inhaltlich-anschaulich Beweise (Wittmann & Müller, 1988) geführt, welche ein Nach-vollziehen allgemeingültiger Begründungen auch ohne das für formale Be-weise meist notwendige algebraische Wissen (Wittmann, 2014) ermögli-chen, da sie mithilfe von Anschauungsmitteln wie Plättchen oder geometri-schen Mustern geführt werden können. Sie werden als Beweise verstanden, die sich auf Konstruktionen und Operationen stützen, welche sich auf eine Klasse von Beispielen beziehen und somit allgemeingültig sein können (Wittmann, 2014).

Inhaltlich-anschauliche Beweise werden oftmals als Vorstufe zum formalen Beweisen verstanden (u.a. Brunner, 2014). Eine solche Hierarchisierung suggeriert ggf., dass es sich beim inhaltlich-anschaulichen Beweisen um eine leichter zu erlernende Tätigkeit handelt als beim formalen Beweisen. Dass letztere (nicht nur) Studierenden Schwierigkeiten bereitet, ist seit langem be-kannt (u.a. Moore, 1994) und entsprechend gut beforscht. So liegen bzgl. formaler Beweise Forschungserkenntnisse zu Vorgehensweisen, Schwierig-keiten und möglichen Unterstützungsmaßnahmen vor (u.a. Kirsten, 2021). Bekannt ist, dass auch das inhaltlich-anschauliche Beweisen keinesfalls tri-vial ist (Kempen, 2019). Um angehende Lehrkräfte beim Erwerb inhaltlich-anschaulicher Beweiskompetenzen zu unterstützen, ist es notwendig, deren Vorgehensweisen und Schwierigkeiten beim Beweisen zu kennen (Kirsten, 2021), entsprechende Erkenntnisse zu inhaltlich-anschaulichen Beweispro-zessen liegen jedoch bislang nicht vor.

Forschungsfrage und Design der Untersuchung

Aufgrund des genannten Forschungsdesiderats werden im Rahmen eines Promotionsprojektes Vorgehensweisen und Schwierigkeiten angehender Grundschullehrkräfte im Kontext inhaltlich-anschaulicher Beweisprozesse

untersucht und deren Beziehung zu formalen Beweisprozessen betrachtet. In diesem Beitrag liegt der Fokus auf folgender Fragestellung:

Wie gehen angehende Grundschullehrkräfte beim inhaltlich-anschaulichen Beweisen vor?

Zur Beforschung wurden Beweisprozesse von Grundschullehramtsstudierenden der Studieneingangsphase ($n=24$) videographiert und analysiert. Um während der Bearbeitungsphase Einblicke in die Gedanken und Absichten der Studierenden zu erhalten sowie kognitive Prozesse nachvollziehen zu können, wurde die Methode des lauten Denkens (Konrad, 2010) angewendet. Die Studierenden erhielten eine der folgenden Aussagen, die sie inhaltlich-anschaulich und formal-deduktiv beweisen sollten:

- Aufgabe „aufeinanderfolgende Zahlen“: Die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch n teilbar, wenn n ungerade ist. ($n=13$)
- Aufgabe „Rechendreieck“: Die Summe der Außenzahlen von Rechendreiecken ist stets gerade. ($n=11$)

Die Auswertung der Daten erfolgt mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2012). Dabei wird kategorienentwickelnd vorgegangen.

Ergebnisse

Die erste Datenanalyse zeigt, dass sich die Vorgehensweisen von angehenden Grundschullehrkräfte bezüglich der Darstellung und der begleitenden sprachlichen Erläuterungen unterscheiden. Eine genauere Analyse der Darstellungen und sprachlichen Erläuterungen zeigt, dass einige Lernende (1) Operationen zur Beweisführung verwenden, andere hingegen (2) Rechnungen vornehmen oder (3) Eigenschaften von Zahlen einbeziehen. Die operativen Vorgehensweisen werden folgend exemplarisch anhand der Beweisprozesse zweier Studierender im Kontext des Aufgabenformats „aufeinanderfolgende Zahlen“ genauer betrachtet. Zu berücksichtigen ist dabei, dass die Beweisführungen ausschließlich auf ikonischer sowie verbaler Ebene erfolgten und Operationen folgend als ikonisch und verbal angedeutete Handlungen verstanden werden.

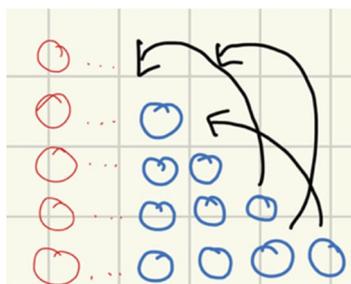


Abb. 1: Neles Darstellung



Abb. 2: Yannicks Darstellung

Die Studentin Nele fertigte die abgebildete Darstellung (Abb. 1) an und begleitete ihre Bearbeitung sprachlich wie folgt: „Den könnte man da halt so (zeichnet einen Pfeil aus der vierten Zeile) (..) dahin verschieben, (zeichnet einen Pfeil vom vorletzten Plättchen der untersten Zeile) (..) den (..) so. (zeichnet einen Pfeil vom letzten Plättchen der untersten Zeile) [...] dann hat man halt wieder diese Fünferpacken.“

Analyse von Neles Vorgehen: Nele deutet an, dass sie nacheinander einzelne Plättchen ihrer gewählten Darstellung solange verschiebt, bis der erwünschte Endzustand („Fünferpacken“) erreicht ist. Dabei scheinen die Reihenfolge und Position beim angedeuteten Umlegen der Plättchen willkürlich, sodass sich weder durch die ikonische noch durch die verbale Darstellung ein Muster identifizieren lässt und nicht erkennbar ist, wie ihr Vorgehen auf weitere Fälle übertragen werden kann. Die einzige erkennbare Regelmäßigkeit findet sich in der Größe der „Packen“. Diese wird im Verlauf des weiteren Bearbeitungsprozesses in Beziehung zum gewählten n betrachtet und für $n = 3$ und $n = 7$ entsprechend angepasst.

Der Student Yannick wählte eine andere Darstellung (Abb. 2), wobei er diese in mehreren Schritten erweiterte. Nachdem zunächst die ersten drei Zeilen entstanden, wurden nacheinander jeweils zwei weitere Zeilen hinzugeführt. Er erklärte anschließend seine Darstellung: „Beim ersten habe ich ja einen Punkt umgelegt, dann beim zweiten Mal drei Punkte, beim (.) vierten Mal [Anm.: gemeint ist das dritte Mal] habe ich dann (..) sechs (..) Punkte umgelegt (..) dass das quasi auch immer (.) mehr wird.“

Analyse von Yannicks Vorgehen: Yannicks Vorgehen unterscheidet sich insofern von Neles Bearbeitung, als er sukzessive sein gewähltes n vergrößert und gleichzeitig die Darstellung der Umleghandlung stetig mit anpasst. In seiner Darstellung lässt sich die Regelmäßigkeit erkennen, dass jeweils größer werdende Dreieckszahlen von den unteren Zeilen nach oben verschoben werden. Angesichts dieser zugrundeliegenden Regelmäßigkeit wird das Vorgehen als regelgeleitetes Operieren kategorisiert. Wenngleich sich diese Regelmäßigkeit grundsätzlich auch bei weiteren Fällen fortsetzen ließe, wird eine solche Fortsetzung von Yannick noch nicht explizit verbal beschrieben.

Diskussion und Ausblick

Die beiden gewählten Vorgehensweisen zeigen exemplarisch, dass hinsichtlich der operativen Handlungen zwischen anscheinend willkürlichen und regelgeleiteten Operationen unterschieden werden kann. Willkürliches Operieren, wie Nele es zeigt, lässt kaum Übertragungen auf andere Fälle zu. Weder die Darstellung noch die sprachliche Begleitung ermöglichen potentiell eine Verallgemeinerung des Vorgehens. Bei regelgeleiteten Operationen,

wie exemplarisch für Yannick gezeigt, lässt sich hingegen in der Darstellung oder sprachlichen Begleitung ein Muster erkennen, welches auf weitere Fälle in selber Form übertragen werden kann und damit dem Anspruch auf Allgemeingültigkeit eines Beweises potentiell gerecht werden könnte. Die Unterscheidung der durch Darstellungen und sprachlichen Erläuterungen ange-deuteten Operationen gilt es vertiefend zu untersuchen, da nach Wittmann & Ziegenbalg (2004, S. 38) eben die Operationen als wesentliches Element inhaltlich-anschaulicher Beweise erst dazu führen, dass ein solcher Beweis Allgemeingültigkeit erreichen kann (Wittmann & Ziegenbalg, 2004).

Als erste Erkenntnis lässt sich daraus ableiten, dass Unterstützung angehen-der Grundschullehrkräfte beim inhaltlich-anschaulichen Beweisen u.a. da-rauf abzielen sollte, regelgeleitet zu operieren und die den Operationen zu-grundliegenden Regelmäßigkeiten auch zu verbalisieren.

Literatur

- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8>
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-24415-6>
- Kirsten, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-32242-7>
- KMK. (2004). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf
- Konrad, K. (2020). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 373–393). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26887-9_41
- Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz Juventa.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249–266. <https://doi.org/10.1007/BF01273731>
- Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, 37, 213–232.
- Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–257). Cornelsen.
- Wittmann, E. C. & Ziegenbalg, J. (2004). Sich Zahl um Zahl hochangeln. In G. Müller, H. Steinbring & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 35–53). Kallmeyer.