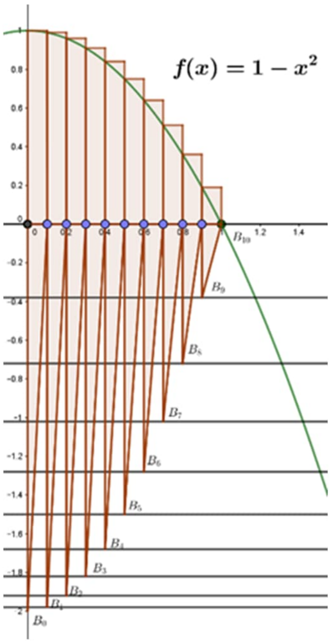
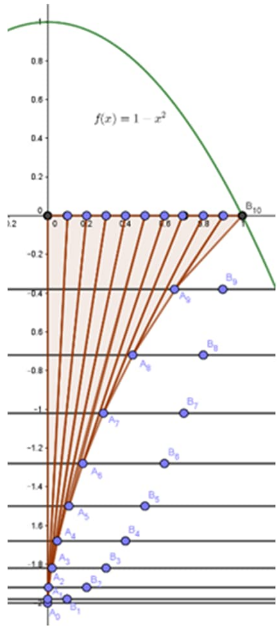
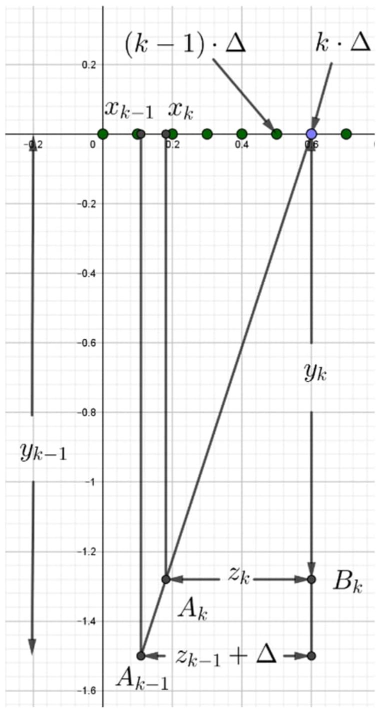
Christoph KIRFEL, Bergen (Norwegen)

Die Fransenmethode zur Bestimmung von Flächen





Die Fransenmethode kann uns helfen, die Fläche unter einem Funktionsgraphen zu finden. In Abbildung 1 sehen wir ein Beispiel, nämlich den Graphen der Funktion $f(x) = 1 - x^2$ über dem Interwall $[a, b] = [0,1]$. Wir teilen das Interwall in Teilinterwalle mit den Endpunkten a=0,Δ,2Δ,…,nΔ=b auf und konstruieren die zugehörigen Riemann-Rechtecke. Diese werden nun durch Dreiecke mit derselben Grundlinie ersetzt, wobei die Höhe eines solchen Dreiecks doppelt so groß ist wie die „Höhe“ des entsprechenden Rechtecks. Die Ecke mit dem spitzen Winkel zeigt nach unten. Damit sind die Flächeninhalte von Dreieck und Rechteck jeweils gleich groß. Die „linke“ Seite der Dreiecke wählen wir senkrecht. Die Gesamtheit dieser „Fransendreiecke“ hat dann den gleichen Flächeninhalt wie die Gesamtheit der Riemann-Rechtecke unter dem Graphen der Funktion. Nun schieben wir die spitzen Ecken der Dreiecke horizontal nach links, bis sie die Seite des vorangehenden Dreiecks treffen. Diese Bewegung ändert den Flächeninnhalt nicht. Auf diese Art erhalten wir eine neue “zusammenhängende” Figur mit dem gleichen Flächeninnhalt wie die Riemann-Rechtecke.



Die spitze Ecke $B_0 = (0, -2f(0) = (0, -2y_0) = A_0$ des ersten Dreiecks bleibt liegen, aber B_1, die spitze Ecke des zweiten Dreiecks wird verschoben, bis sie auf die Gerade von A_0 nach $(\Delta, 0)$ trifft. Diesen Punkt nennen wir A_1. Allgemein wird der Punkt $B_k = (k \cdot \Delta, y_k) = (k \cdot \Delta, -2f(k \cdot \Delta))$ horizontal ver-schoben, bis er auf die Grade von A_{k-1} nach $(k \cdot \Delta, 0)$ trifft. Den Treffpunkt nennen wir $A_k = (x_k, y_k)$. Die “Höhe” oder der y-Wert ist bekannt, wegen $y_k =$

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

$-2f(k \cdot \Delta)$. Für die Länge z_k der Verschiebung von Punkt B_k nach A_k gilt

$$\frac{\boldsymbol{z_k}}{\boldsymbol{y_k}} = \frac{\boldsymbol{z_{k-1} + \Delta}}{\boldsymbol{y_{k-1}}} \textbf{ oder } \boldsymbol{z_k} = \frac{\boldsymbol{y_k}}{\boldsymbol{y_{k-1}}}(\boldsymbol{z_{k-1} + \Delta}).$$

Hier können wir iterieren und erhalten:

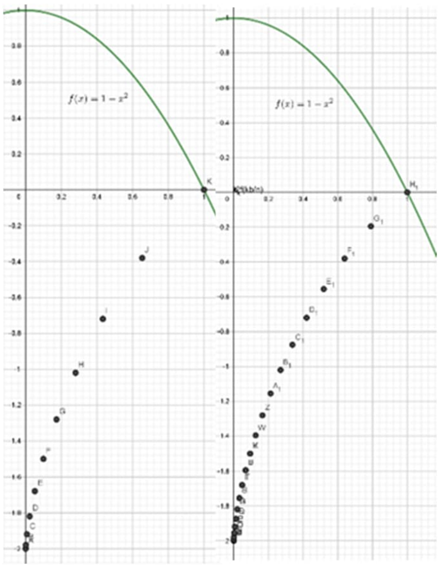
$$\boldsymbol{z_k = \frac{y_k}{y_{k-1}}(z_{k-1}+\Delta) = \frac{y_k}{y_{k-1}}\left(\frac{y_{k-1}}{y_{k-2}}(z_{k-2}+\Delta)\right) + \frac{y_k}{y_{k-1}}\Delta =}$$

$$\boldsymbol{\frac{y_k}{y_{k-2}}z_{k-2} + \frac{y_k}{y_{k-2}}\Delta + \frac{y_k}{y_{k-1}}\Delta = \frac{y_k}{y_0}z_0 + y_k\sum\nolimits_1^k \frac{\Delta}{y_{k-i}}}.$$

Wir nehmen an, dass $y_i \neq 0$ und dass $z_0 = 0$, weil $B_0 = A_0$ und erhalten

$$\boldsymbol{z_k = y_k \sum\nolimits_1^k \frac{\Delta}{y_{k-i}} = y_k \sum\nolimits_1^k \frac{\Delta}{y_i}}.$$

Für die Abszisse $x_k$von A_k gilt dann $x_k = \Delta \cdot k - z_k = \Delta \cdot k - y_k \sum_1^k \frac{\Delta}{y_i}$. Diese Formel gibt uns jetzt den Zusammenhang zwischen dem Punkt $\Delta \cdot k$ der Partition und der *x*-Koordinate des entsprechenden Kurvenpunktes.



Wir interessieren uns nun für die Folge dieser Punkte A_i und wollen erforschen, ob deren Grenzwert zu einer darunterliegende Kurve gehören. Diese möchten wir finden. In den beiden folgenden Abbildungen kann man die Punktfolgen für $n = 10$ und $n = 20$ sehen. Die Abbildungen legen nahe, dass sie gegen eine Grenzkurve konvergieren.

Nun erhöhen wir die Anzahl *n* der Teilintervalle, betrachten aber immer den gleichen Punkt $s\epsilon[a,b]$im Interwall. Das bedeutet, dass *n* und *k* beide mit derselben Geschwindigkeit ins Unendliche ansteigen

$$\boldsymbol{k\frac{(b-a)}{n} = k \cdot \Delta = s}.$$

Wir fragen nun nach dem korrespondierenden Punkt $(x(s), y(s))$ auf der Kurve und erhalten:

$$\boldsymbol{x(s) = \lim_{n\to\infty}\left(k \cdot \Delta - f(k \cdot \Delta)\sum\nolimits_0^k \frac{\Delta}{f(i \cdot \Delta)}\right) = s - f(s)\int_0^s \frac{dt}{f(t)}}$$

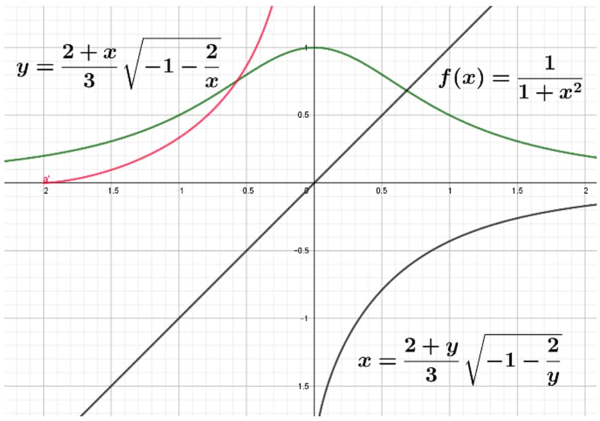
Hier haben wir den Ausdruck $\lim_{n\to\infty} \sum_0^k \frac{\Delta}{f(i\cdot\Delta)}$ als Integral der Funktion $1/f$ über dem Interwall $[0, s]$ gedeutet. Dies ist erlaubt, solange $f(x) \neq 0$ und f monoton ist. Damit haben wir unser erstes Resultat.

Theorem. Gegeben sei eine monoton fallende Funktion $f(x)$ über der x-Achse, dann ist die korrespondierende “Fransenkurve” g unter der x-Achse gegeben durch

$$(*) \qquad \boldsymbol{x(s) = s - f(s)\int_0^s \frac{dt}{f(t)}} \quad \textbf{und} \quad \boldsymbol{y(s) = -2f(s)}.$$

Ist $\boldsymbol{f(a) = 0}$ so ist $\boldsymbol{\int_0^a f(x)dx = -\int_0^a g(x)dx}$.

Bemerkung. Es ist erstaunlich, dass das Integral der Reziprokfunktion $1/f$ auftaucht. Eine geometrische Erklärung dafür haben wir leider nicht gefunden.



Beispiel 1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Die Fransenkurve sieht dann folgendermassen aus:

$x(s) = s - f(s)\int_0^s \frac{dt}{f(t)} = s - \frac{1}{1+s^2}\int_0^2 (1+t^2)dt = s - \frac{s+s^3/3}{1+s^2}$ und $y(s) = \frac{-2}{1+s^2}$.

Nun wissen wir, dass $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. Einsetzen gibt uns

$$x(s) = s - \frac{s+\frac{s^3}{3}}{1+s^2} = \frac{2+y}{3}\sqrt{\frac{-2}{y} - 1}$$

oder $9x^2y = -(2+y)^3$, eine Kurve dritten Grades. Nach Spiegelung um die Winkelhalbierende $y = x$, ergibt sich dann folgender nicht-trivialer Integralzusammenhang

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-2}^0 \left(\frac{(2+x)}{3}\sqrt{\frac{-2}{x} - 1}\right)dx}.$$

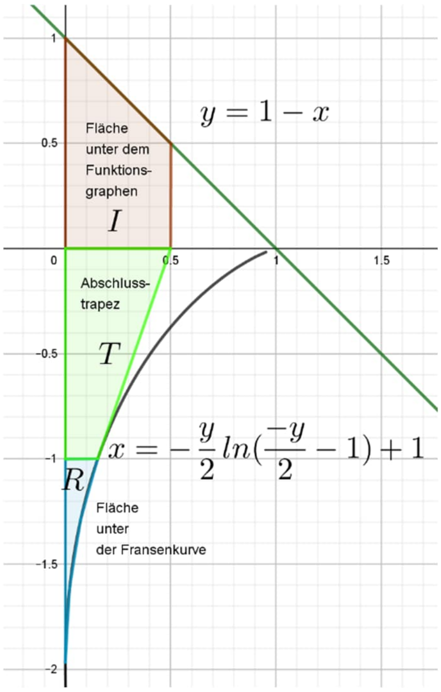
Beispiel 2. $f(x) = 1 - x$.

$$\boldsymbol{x(s) = s - (1-s)\int_0^s \frac{dt}{1-t} = (1-s)(-1+\ln(1-s)) + 1}$$

Zusätzlich haben wir $y(s) = -2(1-s)$ oder $1-s = -y/2$, also

$$\boldsymbol{x = -\frac{y}{2}\left(\ln\left(\frac{-y}{2}\right) - 1\right) + 1}.$$

Kennt man das Hyperbelintegral $\int_0^s \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)$, was wesentlich war um $x(s)$ zu finden, so hilft uns die Fransenmethode, um $\int x\ln(x)dx$ zu finden. Für die ursprüngliche Funktion f gilt $I = \int_0^a (1-x)dx = a - a^2/2$. Die Fläche des Trapezes beträgt $T = (a + x(a))f(a) = (a + (1-a)(-1 + \ln(1-a))(1-a) = (1-a)^2\ln(1-a) + 2a(1-a)$ und für die Fläche unter der Fransenkurve (gespiegelt um $y = x$) gilt



$$\boldsymbol{R = \int_{-2}^{-2(1-a)} \left(\frac{-x}{2}\left(\ln\left(\frac{-x}{2}\right) - 1\right) + 1\right) dx}$$

Weil $\int x\ln(x)dx$ nur im Ausdruck für R auftritt, kann die Gleichung $I = R + T$ dazu benutzt werden, einen Ausdruck für $\int x\ln(x)dx$, was zu dem Zeitpunkt noch unbekannt war. Allgemein gilt

$$\boldsymbol{\int_0^a f(x)dx = T + R}$$
$$\boldsymbol{= (a + x(a))f(a) + \int_{-2}^{-2(1-a)} g(x)dx}$$

Daraus lassen sich etliche neue Integralformelen ableiten.

Resümee. Die Fransenmethode gibt uns eine Möglichkeit, Zusammenhänge zwischen Flächen unter zwei Kurven zu schaffen. Dies führt in einigen Fällen zu überraschenden Beobachtungen und kann helfen neue Integrationsformeln zu entwickeln. Auf die Art können Schüler*innen der Sekundarstufe II und Student*innen des erstens Semesters zusätzliche Einsichten in Fragen beim Thema Integration gewinnen und das Verständnis des Riemann-Integrals vertiefen. Die Fransenkurve selbst hat auch interessante Eigenschaften und ist auch für sich gesehen ein interessantes Studienobjekt. Vorkenntnisse in Integralrechnung sowohl als das Konzept der Parameterkurven sind wichtige Voraussetzungen für die Arbeit mit der Fransenmethode.