Elisa LANKEIT, Paderborn & Rolf BIEHLER, Paderborn

Das totale Differential und die Richtungsableitung – Eine Analyse mit Blick in ausgewählte Lehrbücher

Für den eindimensionalen Fall wird das Konzept der Ableitung im Kontext des Schulunterrichts bereits seit vielen Jahren ausführlich diskutiert (bspw. Blum & Kirsch, 1979; Greefrath et al., 2016; Zandieh, 2000). Für den mehrdimensionalen Fall und die verschiedenen Differenzierbarkeitskonzepte sieht die Lage jedoch anders aus. Martínez-Planell und Trigueros (2021) geben einen Überblick über Studien zu „multivariable calculus", wobei diese sich größtenteils auf Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und insbesondere geometrische Deutungen beziehen. Umfassende fachliche Analysen von Differenzierbarkeitskonzepten im mehrdimensionalen Fall fehlen jedoch, können aber Anregungen für eine Vorlesungsgestaltung liefern, die das Begriffsverständnis unter Einschluss des Concept Image (Tall & Vinner, 1981) der Lernenden bereichern und verbessern könnte. Für die Analyse der verschiedenen Differenzierbarkeitskonzepte im $\mathbb{R}^n$, ihres Zusammenhangs untereinander und ihre Beziehung zum eindimensionalen Fall, haben wir ein Konzept entwickelt, das Bedeutungen in verschiedenen Interpretationskontexten unterscheidet, unterschiedliche Definitionen berücksichtigt und die begrifflichen Relationen zu anderen Begriffen einbezieht (Sierpinska et al., 2002, zu „theoretical systems" in der Mathematik). Das resultierende „Bedeutungsmodell" verallgemeinert die Begriffe Concept Definition und Concept Image und bezieht das Konzept der Grundvorstellungen ein, soweit das für die Begriffsbedeutung an der Hochschule relevant ist (Lankeit & Biehler, 2021).

Wir befassen uns hier mit dem Zusammenhang von totalem Differential und den Richtungsableitungen. Dabei lässt sich zum einen die Verbindung der Eigenschaften „totale Differenzierbarkeit" und „Richtungsdifferenzierbarkeit" („Welche Eigenschaft impliziert die andere?") sowie zum anderen die Verbindung der Objekte „totales Differential" und „Richtungsableitung" („Wenn beide existieren, lässt sich das eine in bestimmter Weise durch das andere ausdrücken?") analysieren. Wir unterscheiden dabei nach Hußmann und Prediger (2016) die formale und die semantische Ebene. Dabei zielt die formale Ebene auf die Behandlung mathematischer Objekte und Phänomene in ihrer formalen Präsentation und logischen Struktur ab, während im Rahmen der semantischen Ebene Sinn und Bedeutung der mathematischen Konzepte adressiert werden. In unserem Kontext verorten wir die Formulierung von Sätzen und deren Beweise auf der formalen, anschauliche Erklärungen und Plausibilisierungen in verschiedenen Interpretationskontexten (z. B. analytisch-algebraisch, geometrisch und approximativ, Lankeit & Biehler, 2021) auf der semantischen Ebene. Die Verbindung der Objekte

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

lässt sich auf formaler Ebene beispielsweise durch eine Formel ausdrücken, auf semantischer Ebene interessieren wir uns dafür, welche Bedeutungsfacetten dies beinhaltet. In diesem Beitrag gehen wir auf Bedeutungsfacetten des Zusammenhangs zwischen totaler Differenzierbarkeit/totalem Differential und Richtungsdifferenzierbarkeit/Richtungsableitung ein und analysieren unter dieser Perspektive ausgewählte Analysis-II-Lehrbücher.

Kurzanalyse der Zusammenhänge von totaler Differenzierbarkeit und Richtungsdifferenzierbarkeit

Auf formaler Ebene kann man den Satz formulieren und beweisen, dass totale Differenzierbarkeit an einer Stelle ξ Richtungsdifferenzierbarkeit an der Stelle ξ in alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ impliziert. Die Umkehrung gilt aber nicht. Die gültige Implikation kann man sich auf der semantischen Ebene in den verschiedenen Deutungskontexten plausibilisieren: Im geometrischen Kontext bedeutet totale Differenzierbarkeit beispielsweise die Existenz der Tangentialebene, welche insbesondere die Existenz von Tangenten in den entsprechenden Richtungen impliziert. Im approximativen Kontext erhält man durch das totale Differential eine affin-lineare Approximation der Funktion für beliebige kleine Veränderungen, was impliziert, dass man insbesondere bei kleinen Veränderungen in alle spezifischen Richtungen ebenfalls gute Approximationen erhält. Auf der formalen Ebene genügt es für die umgekehrte Richtung, ein Gegenbeispiel zu finden. Auf der semantischen Ebene hingegen ist es sinnvoll, verschiedene Arten von Gegenbeispielen zu betrachten und zu klassifizieren, die sich darin unterscheiden, wie „verständlich" dadurch die Nicht-Gültigkeit wird. Man kann darüber hinaus auf der formalen Ebene nachweisen, dass auch weitere zusätzliche Eigenschaften wie Stetigkeit oder Linearität der Abbildung $v \mapsto D_v f(\xi)$ nicht zu totaler Differenzierbarkeit führen, die Forderung der Stetigkeit der Abbildungen $x \mapsto D_v f(x)$ in einer Umgebung von ξ für alle v jedoch sehr wohl. Auf semantischer Ebene lässt sich dies – ggf. auch anhand von passenden Gegenbeispielen – in verschiedenen Deutungskontexten plausibilisieren.

Zum Zusammenhang der Objekte lässt sich Folgendes feststellen: Wenn das totale Differential $Df(\xi)$ und damit auch alle Richtungsableitungen $D_v f(\xi)$ existieren, so gilt: $D_v f(\xi) = Df(\xi)(v)$. Diese Feststellung und ihr Beweis sind auf der formalen Ebene zu verorten. Auf semantischer Ebene erhält man durch diesen Zusammenhang der beiden mathematischen Objekte neben einer Berechnungsmöglichkeit für die Richtungsableitung oder umgekehrt für das totale Differential auch eine weitere Interpretation des totalen Differentials: Das totale Differential $Df(\xi)$ ist diejenige lineare Abbildung, die jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ auf die lokale Änderungsrate von f an der Stelle ξ in Richtung v abbildet.

Lehrbuchanalyse

Nach der Beschreibung des Zusammenhangs auf formaler und semantischer Ebene geben wir einen Einblick in unsere Analyse von drei ausgewählten Lehrtexten zur Analysis II. In unsere Analyse schließen wir mit den Analysis-II-Lehrbüchern von Forster (2008) und Heuser (1992) zwei Standardwerke ein sowie ein Analysis-II-Skript von Grieser (2019), das noch nicht als Buch veröffentlicht ist. Wir gehen für die Analyse nach der Methode der Dokumentenanalyse nach Bowen (2009) vor. Dabei konzentrieren wir uns auf die Abschnitte, in denen die Differenzierbarkeitskonzepte eingeführt und erste Eigenschaften präsentiert werden. Tabelle 1 zeigt, welche der Zusammenhänge in welcher Weise auf der formalen (f) und semantischen (s) Ebene in den drei Lehrwerken (F, G, H) dargestellt werden.

		F	**G**	**H**
$\boldsymbol{TD} \Rightarrow \boldsymbol{RD}$	f		✓	✓
	s			
$\boldsymbol{RD} \nRightarrow \boldsymbol{TD}$	f		✓	
	s		Anschauliches Gegenbeispiel	
Zshg. der Objekte	f		✓	✓
	s		Eindeutigkeit des TD, Interpretation des TD mit Änderungsraten, Berechnung des TD über part. Abl. als Spezialfall der RA	Berechnung der RA

Tab. 3: Ergebnisse der Lehrbuchanalyse

Die Lehrbuchanalyse zeigt, wie unterschiedlich der Zusammenhang dargestellt wird. Während bei Forster (2008) kein direkter Zusammenhang zwischen den beiden Eigenschaften oder Objekten expliziert wird – dort wird die Richtungsableitung lediglich mit der partiellen Ableitung und dem Gradienten in Verbindung gebracht –, wird bei Heuser (1992) zumindest auf der formalen Ebene der geltende Zusammenhang explizit besprochen und auch auf der semantischen Ebene bemerkt, dass somit die Richtungsableitung mittels des totalen Differentials berechnet werden kann. Grieser (2019) stellt den Zusammenhang am ausführlichsten dar, indem beispielsweise auch die nicht geltende Implikation mit einem anschaulichen Gegenbeispiel widerlegt und das Nicht-Gelten nicht nur bewiesen, sondern auch veranschaulicht wird. Auch der Zusammenhang von totalem Differential und Änderungsraten wird thematisiert. Aber auch hier findet keine Plausibilisierung oder Veranschaulichung der geltenden Implikation „totale Differenzierbarkeit ⇒ Richtungsdifferenzierbarkeit“ statt. Interessant ist auch, wie Grieser (2019) den Zusammenhang nutzt, um Bedeutungsfacetten des totalen Differentials herauszustellen und Berechnungsmöglichkeiten für dieses anzugeben, während bei Heuser (1992) umgekehrt das totale Differential zur Berechnung der Richtungsableitung herangezogen wird.

Ausblick

Das umfassende Bedeutungsmodell und die umfangreicheren Lehrbuchanalysen, an denen wir arbeiten, sollen fachdidaktische Grundlagen für eine didaktisch reflektiertere Gestaltung von Analysis-II-Lehrveranstaltungen liefern und einen theoretischen Beitrag zur didaktischen Bedeutungsanalyse hochschulmathematischer Begriffe liefern, für die die bisherigen schuldidaktischen Konzepte nicht ausreichend sind.

Literatur

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht*, *25*(1), 6–24.

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative research journal*, *9*(2), 27. doi: 10.3316/qrj0902027

Forster, O. (2008). *Analysis 2*. Vieweg+Teubner.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Weigand, H. & Ulm, V. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer.

Grieser, D. (2019). *Analysis II. Skript zu den Vorlesungen an der Uni Oldenburg: Analysis IIa: Integralrechnung einer Variablen und Differentialgleichungen, Analysis IIb: Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher* [Vorlesungsskript]. https://uol.de/f/5/inst/mathe/personen/daniel.grieser/Lehre/Skripte/skript-ana2-Juli-2018.pdf

Heuser, H. (1992). *Lehrbuch der Analysis* (Bd. 2). Teubner.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 33–67. doi: 10.1007/s13138-016-0102-8

Lankeit, E. & Biehler, R. (2021). Stoffdidaktische Analysen zur Ableitung im Ein- und Mehrdimensionalen. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021* (S. 101–103). WTM.

Martínez-Planell, R. & Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 695–707. doi: 10.1007/s11858-021-01233-6

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). *A Study of Relationships Between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra*. Concordia University.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. doi: 10.1007/bf00305619

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103–127.