

Markus LEIFELD, Paderborn & Sebastian REZAT, Paderborn

## **Verstehen schriftlicher Rechenverfahren durch algorithmisches Denken am Beispiel der schriftlichen Subtraktion**

### **Einleitung**

Als Reaktion auf die zunehmende Digitalisierung der Gesellschaft veröffentlichte die Kultusministerkonferenz in Deutschland im Jahr 2016 das Kompetenzmodell „Kompetenzen in der digitalen Welt“. Dieses Modell benennt Kompetenzen, die Lernende der Primar- und Sekundarstufe bezüglich des Umgangs mit digitalen Medien erwerben sollen. Eine dieser Kompetenzen bezieht sich explizit auf das Problemlösen durch die Verwendung von Algorithmen.

Ein traditioneller Lerngegenstand, bei dem Lernende in der Grundschule mit Algorithmen in Berührung kommen, sind die schriftlichen Rechenverfahren. Studien zeigen, dass diese von Schüler\*innen zwar bevorzugt, aber häufig nicht mit Verständnis angewandt werden (Jensen & Gasteiger, 2019). Diese Erkenntnisse führten zu einer kritischen Reflexion der Rolle der schriftlichen Rechenverfahren im Mathematikunterricht (Selter, 2000).

Dieser Beitrag soll die Bedeutung algorithmischen Denkens für das Verständnis der schriftlichen Rechenverfahren der Addition und Subtraktion herausstellen und folgende Frage beantworten: Wie kann algorithmisches Denken zum Verständnis der schriftlichen Subtraktion beitragen?

### **Verstehen der schriftlichen Rechenverfahren**

Hiebert und Carpenter (1992) beschreiben Verstehen im mathematikdidaktischen Kontext als „making connections between ideas, facts or procedures“ (S. 67). Verstehen bezieht sich dabei auf zwei Formen von Wissen, die notwendig für mathematische Expertise sind (Hiebert & Carpenter, 1992). Auf der einen Seite steht das konzeptionelle Wissen, welches ein Netzwerk mathematischer Gesetze und Funktionen darstellt und stetig erweitert wird. Auf der anderen Seite steht das prozedurale Wissen über Algorithmen und Regeln, um mathematische Aufgaben lösen zu können (Hiebert & Lefevre, 1986). Werden beide Wissensformen voneinander getrennt behandelt, kann es dazu kommen, dass Lernende Probleme lösen, ohne zu verstehen, wie sie vorgegangen sind. Oder andersherum: Sie besitzen theoretisches mathematisches Wissen, ohne dieses anwenden zu können (Hiebert & Lefevre, 1986). Für das Verstehen mathematischer Inhalte ist es also notwendig, beide Wissensformen in einen Zusammenhang zu bringen, sodass

mathematische Verfahren in das Netzwerk mathematischer Beziehungen integriert werden.

Bezogen auf die schriftliche Addition und Subtraktion bedeutet Verstehen, dass die Lernenden das prozedurale Wissen der Algorithmen mit dem konzeptionellen Wissen über das Stellenwertprinzip verbinden, auf welchem die Verfahren grundsätzlich basieren (Padberg & Büchter, 2015). Das Erkennen des Stellenwertprinzips innerhalb der Algorithmen soll dabei durch algorithmisches Denken unterstützt werden.

Um aber überhaupt zu zeigen, wie das inhaltliche Verstehen von Algorithmen gelernt werden kann, erarbeiteten Fan und Bokhove (2014) ein dreistufiges Modell. Ausgehend von prozeduralem Wissen über Algorithmen werden die Verfahren in Beziehung zu konzeptionellem Wissen gesetzt, um später neue Algorithmen zu entwickeln. Dieses Modell soll als Grundlage für die verstehensorientierte Herleitung des Subtraktionsalgorithmus aus der schriftlichen Addition dienen.

### **Verstehendes Lernen von Algorithmen**

Das Modell von Fan und Bokhove (2014) trägt zum einen dazu bei, Verbindungen zwischen prozeduralem und konzeptionellem Wissen herzustellen und nimmt zum anderen die eigenständige Entwicklung von Algorithmen in den Fokus. Für die Entwicklung der schriftlichen Subtraktion aus der schriftlichen Addition bedeutet dies, dass das prozedurale Wissen über das Verfahren der schriftlichen Addition im Modell die Ausgangslage auf der ersten Stufe „Knowledge and Skills“ bildet. Die Schüler\*innen kennen, bezogen auf das Additionsverfahren, den Ablauf des Algorithmus und übertragen ihn auf vergleichbare Situationen mit identischem Operator. Auf der zweiten Stufe „Understanding and Comprehension“ sollen die Lernenden erkennen, warum der Algorithmus funktioniert. Das prozedurale Wissen über den Algorithmus wird in das bestehende konzeptionelle Netz mathematischen Wissens integriert. Auf der dritten Stufe „Evaluation and Construction“ soll schließlich eine Bewertung, Optimierung und gegebenenfalls eine eigene Entwicklung von Verfahren durch die Erweiterung des Wissensnetzes, mit Hilfe anderer mathematischer Verfahren, stattfinden (Fan & Bokhove, 2014). Das Modell unterstützt also das Verstehen mathematischer Algorithmen, indem ausgehend vom prozeduralen Wissen über mathematische Verfahren Verbindungen zu konzeptionellem Wissen hergestellt werden und so das Verfahren in das bestehende Netz mathematischen Wissens integriert wird. Um diese Verbindungen zu ermöglichen und damit zu verstehen, warum der Algorithmus funktioniert, müssen einzelne Handlungsschritte des

Algorithmus erkannt und generalisiert werden. Dieses Vorgehen wird als „algorithmisches Denken“ bezeichnet.

### **Verstehen der schriftlichen Subtraktion durch algorithmisches Denken**

Unter „algorithmischem Denken“ werden Denkhandlungen zusammengefasst, die bedeutsam sind für das Nachvollziehen, Verstehen und Entwickeln von Algorithmen. Li et al. (2020) zählen dazu *Dekomposition*, *Abstraktion*, *Fehlersuche*, *Iteration* und *Generalisierung*. Es stellt somit ein Mittel dar, um den Verstehensprozess des Modells von Fan und Bokhove (2014) zum verstehenden Lernen von Algorithmen zu unterstützen. Vom Additionsalgorithmus ausgehend, soll durch die Handlungen des algorithmischen Denkens also ein verstehendes Lernen der schriftlichen Subtraktion stattfinden.

Für diesen Lernprozess ist das prozedurale Wissen (Stufe „Knowledge and Skills“) über das Verfahren der schriftlichen Addition Voraussetzung. Schüler\*in-nen sind bereits in der Lage, den Algorithmus geläufig anzuwenden. Um das prozedurale Wissen in Verbindung zu bereits existierendem konzeptionellem Wissen zu bringen, muss der Algorithmus der Addition im Unterricht in seine Teilschritte zerlegt werden (*Dekomposition*). Durch diese Handlung des algorithmischen Denkens sollen sich die Lernenden dem stellenweisen Vorgehen und dem Bündelungsprinzip bewusst werden (Stufe „Understanding and Comprehension“), welches die Grundlage für jede schriftliche Addition bildet (*Abstraktion*) und damit entscheidend ist für das Verstehen des Algorithmus. Im nächsten Schritt sollen die Schüler\*innen die verstandenen Teilhandlungen der schriftlichen Addition einer Subtraktionsaufgabe gegenüberstellen. Durch die Suche nach *generalisierbaren* Mustern und Strukturen zwischen der Addition und Subtraktion erkennen die Lernenden das grundsätzlich identische stellenweise Vorgehen bei beiden Rechenalgorithmen. Ebenso wird den Schüler\*innen bewusst, dass sich beide Verfahren im Prozess der (Ent-)Bündelung und des Operators gegensätzlich sind. Während bei der Addition von der kleineren Stelle zur größeren gebündelt wird, werden bei der Subtraktion größere Stellen zur nächstkleineren Stelle entbündelt. Diese Erkenntnis soll genutzt werden, um den bekannten Subtraktionsalgorithmus zu entwickeln (Stufe „Evaluation and Construction“). Während also das stellenweise Vorgehen bei beiden Verfahren bestehen bleibt, wird der Operator der Addition mit dem Operator der Subtraktion getauscht und somit der Prozess der Bündelung für die Subtraktion umgekehrt. Das Wissen über das stellenweise Vorgehen der schriftlichen Addition wird mit dem Wissen über die Umkehroperationen Entbündeln und Abziehen verknüpft, um die schriftliche Subtraktion verstehend zu entwickeln. Im Zuge der Herleitung der schriftlichen Subtraktion aus der Addition stellt die

*Fehlersuche* abschließend eine Handlung dar, welche den fehlerfreien Ablauf des finalen Algorithmus gewährleistet. Die Lernenden können durch das „Trial-and-Error“-Prinzip das eigene Vorgehen überprüfen und ihren Algorithmus der schriftlichen Subtraktion optimieren. Werden diese beschriebenen Gedankengänge in der Entwicklung des Algorithmus berücksichtigt, kann von „algorithmischem Denken“ als Weg zur Lösung eines Problems durch definierte und evaluierte Schritte gesprochen werden (Bocconi et al., 2016).

Es zeigt sich, dass algorithmisches Denken einen Beitrag zum verstehenden Lernen der Algorithmen schriftlicher Rechenverfahren in der Theorie leisten kann. Algorithmisches Denken stellt eine Herangehensweise dar, um das Verstehen des Algorithmus, also die Verbindung von prozeduralem und konzeptionellem Wissen, zu fördern und den Verstehensprozess an sich zu strukturieren. Statt neue Inhalte zu vermitteln, zeigt es einen neuen Weg auf, die schriftliche Subtraktion verstehend zu erarbeiten.

## Literatur

- Bocconi, S., Chiocciariello, A., Dettori, G., Ferrari, A. & Engelhardt, K. (2016). *Developing computational thinking in compulsory education. Implications for policy and practice*. European Commission – Scientific and Technical Research Reports. <https://data.europa.eu/doi/10.2791/792158>
- Fan, L. & Bokhove, C. (2014). Rethinking the role of algorithms in school mathematics: a conceptual model with focus on cognitive development. *ZDM Mathematics Education*, 46(3), 481–492. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0590-2>
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 65–97). Macmillan Publishing.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics. An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1–23). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative Studie zu spezifischen Fehlern und zum Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(2), 135–167. <https://doi.org/10.1007/s13138-018-00139-3>
- Li, Y., Schoenfeld, A. H., diSessa, A. A., Graesser, A. C., Benson, L. C., English, L. D. & Duschl, R. A. (2020). On Computational Thinking and STEM Education. *Journal for STEM Education Research*, 3(2), 147–166. <https://doi.org/10.1007/s41979-020-00044-w>
- Padberg, F. & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe - Arithmetik*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43449-9>
- Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(3–4), 227–258. <https://doi.org/10.1007/BF03338920>