Kointegration von Aktienkursen*

Professor Dr. Walter Krämer
Fachbereich Statistik, Universität Dortmund
D-44221 Dortmund

Oktober 1997

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht das gemeinsame Zeitreihenverhalten von spekulativen Preisen, speziell von Aktienkursen. Anhand ausgewählter deutscher Dividendenwerte wird gezeigt, daß dieses gemeinsame Zeitreihenverhalten zu den Markt schlagenden Anlagestrategien führen kann und in diesem Sinn mit effizienten Märkten nicht verträglich ist.

1 Das Problem

Sei x_t ein um Dividenden, Nennwertänderungen etc. bereinigter Aktienkurs. In einem informationseffizienten Markt ist dann $y_t := \ell\mathrm{n}(x_t)$ ein Random Walk mit Drift (Le Roy 1989):

$$y_t = \delta_t + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 1\ ,\dots, T). \tag{1}$$

*Ich danke Ingolf Dittmann, Gerd Hansen, Jürgen Wolters und zwei anonymen Gutachtern der ZfbF für zahlreiche Anregungen und Verbesserungsvorschläge, verbleibende Fehler sind dem Autor anzulasten; bei der rechentechnischen Umsetzung haben mir Uwe Hassler und Ralf Runde beigestanden.

Dabei ist δ_t die bei kontinuierlicher Verzinsung in Periode t erwartete bzw. geforderte Rendite; sie wird im weiteren als (potentiell) variabel unterstellt.[1]

Im Mittelpunkt der folgenden Betrachtung stehen die unerwarteten Renditen (= Überrenditen = Innovationen) [2] ε_t; in einem effizienten Markt bilden diese eine Martingal–Differenzenfolge:

$$E(\varepsilon_t|\mathcal{A}_{t-1}) = 0 \tag{2}$$

mit $\mathcal{A}_{t-1}$ die Information am Ende der Periode $t-1$. Sie sind damit nicht aus vergangenen Kursen und sonstigen allgemein zugänglichen Informationen vorhersagbar. Außerdem sind sie, falls die zweiten Momente existieren, seriell unkorreliert:

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) &= E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}) = E\left(E(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}|\mathcal{A}_{t-1})\right) \\ &= E\left(\varepsilon_{t-1}E(\varepsilon_t|\mathcal{A}_{t-1})\right) = E(\varepsilon_{t-1} \cdot 0) = 0\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Implikationen eines effizienten Kapitalmarktes sind seit langem ein bewährter Ausgangspunkt, um ebendiese Effizienz zu testen: Saisoneffekte, Winner–Looser–Überreaktionen, langfristige und kurzfristige Autokorrelationen, erfolgreiche Handels–Regeln oder die Prognostizierbarkeit von Überrenditen aufgrund des Wetters oder anderer ökonomischer und nichtökonomischer Variablen sind die am häufigsten getesteten Anomalien, die diesen Konsequenzen eines effizienten Marktes zunächst zuwiderlaufen (Saunders 1993, Krämer und Runde 1996, neben vielen anderen).

[1] Bei den im weiteren verwendeten täglichen Renditen läßt sich δ_t als kurzfristig konstant betrachten. Jedoch überspannt die im weiteren betrachtete Stichprobe mehr als drei Jahrzehnte, hier ist Konstanz kaum als gegeben anzunehmen.
Die von der jeweils unterstellten Kapitalmarkttheorie abhängigen Bestimmungsgründe für δ_t bleiben im weiteren außerhalb der Betrachtung.

[2] Leider ist der Sprachgebrauch bezüglich "Überrenditen" nicht einheitlich. Alternativ wird darunter oft auch die Differenz zwischen tatsächlicher und Marktrendite (siehe etwa Bromann et al. 1997) oder die Differenz zwischen tatsächlicher und risikoloser Rendite verstanden; letztere sind auch in einem effizienten Markt vorhersagbar.

Diese Tests unterscheiden sich einmal hinsichtlich der zugelassenen Alternativen zu einem effizienten Markt, zum anderen durch die implizit unterstellten Informationsmengen $\mathcal{A}_t$, bezüglich derer (2) und (3) gefordert werden: Während etwa auf Chart–Techniken beruhende Filterstrategien oder Autokorrelationstests nur die vergangenen Kurse des betrachteten Papieres selbst benutzen, also die im Fama'schen (1970) Sinne "schwache" Effizienz des Marktes überprüfen, werden die Informationsmengen $\mathcal{A}_t$ bei anderen Tests auch noch von weiteren Variablen wie Kalenderdaten (Saisoneffekte), relativer Firmengröße (Size–Effekte) oder Kurs–Gewinn–Verhältnissen und anderen firmenspezifischen Informationen aufgespannt. Hier handelt es sich also um Tests der "halbstarken" (semi–strong) Effizienz. Aber in einer Hinsicht stimmen die meisten dieser Tests doch überein: Von Ausnahmen wie Winner–Looser Strategien abgesehen, stellen sie allein auf das univariate Zeitreihenverhalten der untersuchten Kurse ab, die durch effiziente Märkte implizierten Konsequenzen für das gemeinsame, multivariate Zeitreihenverhalten der Kurse bleiben außer Acht.

Dieses gemeinsame, multivariate Zeitreihenverhalten stochastischer Prozesse steht im Zentrum der im Kielwasser von Engle und Granger (1987) entwickelten Kointegrationsmethodologie, die sich auch für statistische Tests der Effizienzmarkttheorie verwenden läßt. Wie man leicht sieht, und wie im nächsten Abschnitt nachgewiesen wird, ist Kointegration von (logarithmierten) Aktienkursen mit seriell unkorrelierten Überrenditen nicht verträglich; mit anderen Worten: Ein Nachweis von Kointegrationsbeziehungen liefe auf eine Ablehnung eines jeden seriell unkorrelierte Überrenditen implizierenden Kapitalmarktmodells hinaus.

Anders als univariate sind solche multivariaten Kointegrationsmethoden bislang eher selten für Effizienztests von Aktienmärkten herangezogen worden

(Cherchi und Havenner 1988, Taylor und Tonks 1989, Kasa 1992, Stengos und Panes 1992, MacDonald und Power 1993, Corhay et al. 1993, Richards 1995). Diese Arbeiten geben sich in der Regel mit dem rein statistischen Nachweis einer Kointegrationsbeziehung zufrieden, ohne den Konsequenzen bezüglich effizienter Märkte näher nachzuspüren und vor allem: ohne die für Standard–Kointegrationsanalysen nötigen Voraussetzungen nachzuprüfen.

In der vorliegenden Arbeit werden erstmals deutsche Aktienkurse einer Kointegrationsanalyse unterworfen. Dabei zeigt sich, daß zwar keine Standard–Kointegrationen nachgewiesen werden können (in dem Sinn, daß eine Linearkombination der logarithmierten Kurse als stationärer ARMA–Prozess modellierbar wäre), daß gewisse Linearkombinationen aber dennoch stochastisch beschränkt zu bleiben scheinen, und daß dieser Sachverhalt für profitable Handelsstrategien auszunutzen ist.

2 Integrierte und kointegrierte stochastische Prozesse

Unter leichtem Mißbrauch der Notation sei $y_t = \left(y_t^{(1)}, \ldots, y_t^{(n)}\right)'$ in weiteren ein vektorwertiger stochastischer Prozeß. Die Komponenten $y_t^{(i)}$ von y_t heißen integriert der Ordnung 1 (kurz: $y_t^{(i)} \sim I(1)$), falls ihre mittelwertbereinigten ersten Differenzen als stationäre ARMA–Prozesse (alias $I(0)$–Variable) modellierbar sind:

$$\Delta y_t^{(i)} = y_t^{(i)} - y_{t-1}^{(i)} = \varepsilon_t^{(i)} + \delta_t^{(i)} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_t^{(i)} \sim \text{ARMA}(p, q). \tag{4}$$

In leichter Verallgemeinerung der Standarddefinition ist dabei ein zeitvariabler Wert von $E(\Delta y_t^{(t)})$ zugelassen.

Um auszuschließen, daß bereits die Ausgangsprozesse $y_t^{(i)}$ selbst stationäre Prozesse sind, soll ferner die Spektraldichte der $\varepsilon_t^{(i)}$ an der Stelle 0 einen positiven Wert annehmen.

Der in (4) zusammengefaßte Sachverhalt läßt sich umformulieren zu

$$y_t^{(i)} = y_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j^{(i)} + g^{(i)}(t), \quad (t = 1, \ldots, T), \tag{5}$$

mit $g^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{t} \delta_j^{(i)}$, was auch die Bezeichnung "integriert der Ordnung 1" erklärt: Die stationären Ausgangsvariablen $\varepsilon_t^{(i)}$ werden einmal aufaddiert (integriert).

In einem effizienten Aktienmarkt mit konstanten Innovationsvarianzen sind die logarithmierten Kurse offensichtlich integriert der Ordnung 1: Die $\varepsilon_t^{(i)}$ sind unkorreliert, d.h. $\varepsilon_t^{(i)} \sim$ ARMA(0,0).

Im weiteren seien alle Komponenten des n–dimensionalen Vektorprozesses y_t integriert der Ordnung 1 im Sinne von (4) und (5). Ein solcher Vektorprozeß y_t aus ausschließlich integrierten, stochastisch trendbehafteten Komponenten $y_t^{(i)}$ heißt <u>kointegriert</u>, wenn eine nichttriviale Linearkombination der $y_t^{(i)}$ existiert, die keinen Trend mehr hat. Formal: $y_t^{(i)} \sim I(1)$ für $i = 1, \ldots, n$, aber es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $c = (c_1, \ldots, c_n)'$ (den Kointegrationsvektor) mit $c'y_t \sim I(0)$. [3]

Abbildung 1 zeigt beispielhaft zwei unabhängige Random Walks mit Drift (keine Kointegration), Abbildung 2 zwei kointegrierte stochastische Prozesse (erzeugt durch Addition zweier unabhängiger stationärer Prozesse zu ein- und demselben Random Walk); die Diagramme zeigen, wie stochastisch trendbehaf-

[3] Bei nichttrivialen Driftkomponenten $\delta^{(i)}$ — der Standardfall bei Aktienkursen — beinhaltet dies die Zusatzbedingung $c'\delta = 0$; bei zeitvariablen Driftkomponenten beinhaltet dies die Zusatzbedingung $c'g(t) = 0$ <u>für alle</u> t.

tete Variablen ohne Kointegration immer weiter auseinanderdriften, während kointegrierte Variable dem Trend zum Trotz eng beieinander bleiben. [4]

Der Kointegrationsvektor c ist offenbar nicht eindeutig, denn jedes skalare Vielfache von c ist ebenfalls ein kointegrierender Vektor; falls mehrere linear unabhängige Kointegrationsvektoren $c^{(1)}, \ldots, c^{(r)}$ existieren, ist auch jede Linearkombination ein Kointegrationsvektor; r heißt dann der Kointegrationsrang des Systems.

Kointegration hat verschiedene Konsequenzen. Die für die Zwecke der vorliegenden Arbeit wichtigste ist die sog. "Fehlerkorrekturform" des Systems (Engle und Granger 1987, S. 255; Lütkepohl 1995): Sei y_t ein n–dimensionaler kointegrierter stochastischer Prozeß mit Kointegrationsrang r (d.h. es gibt einen aus r linear unabhängigen Kointegrationsvektoren $c^{(1)}, \ldots, c^{(r)}$ zusammengesetzte $n \times r$ Matrix $C = [\, c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(r)}]$ mit $C'y_t \sim I(0)$). Dann gibt es eine weitere $n \times r$ Matrix D mit $det(C'D) \neq 0$, so daß

$$\begin{aligned} \Delta y_t - \delta_t &= DC'y_{t-1} \\ &+ \text{ Linearkombination von verzögerten Werten von } \Delta y_t \\ &+ \text{ stationärer Rest.} \end{aligned} \tag{6}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung für einen multivariaten Aktienkursprozeß ist evident: Der Vektor Δy_t der ersten Differenzen der logarithmierten Kurse entspricht dem Vektor der Renditen, $\Delta y_t - \delta_t$ sind die unerwarteten Renditen, und aus (6) folgt

$$\begin{aligned} &E(\Delta y_t - \delta_t | \mathcal{A}_{t-1}) = \\ &\quad DC'y_{t-1} + E(\text{übrige Terme} | \mathcal{A}_{t-1}) \neq 0 \;, \end{aligned} \tag{7}$$

[4] Man beachte aber, daß dieses enge Beieinanderbleiben für Kointegration nicht nötig ist: es reicht, wenn die erste Variable und ein geeignetes <u>Vielfaches</u> der zweiten nahe beieinander bleiben.

im Widerspruch zur zentralen Gleichung (2): Überrenditen sind aus verzögerten Werten vergangener Kurse vorhersagbar, aber genau das ist per definition der Überrenditen ausgeschlossen — Kointegration der kumulierten Überrenditen ist mit keinem Kapitalmarktmodell verträglich, welches die Martingal–Differenzeneigenschaft der Überrenditen impliziert.

3 Sind die deutschen Großchemiewerte kointegriert?

Im Mittelpunkt der folgenden Untersuchung stehen tägliche logarithmierte Kassakurse von Bayer, BASF und Hoechst (retrograd bereinigt, vom 4.1.1960 bis 30.12.1991, entsprechend einem Stichprobenumfang $T = 7928$). Dieser Auswahl lag der Gedanke zugrunde, daß sich diese Firmen hinsichtlich Größe, Produktpalette und Kostenstruktur sehr ähneln; alle sind aus der gleichen unternehmerischen Wurzel, den IG–Farben, hervorgegangen, sie operieren auf verwandten Märkten, unterliegen vergleichbaren Risiken: sofern also Kointegration auf deutschen Aktienmärkten nachgewiesen werden kann, dann am ehesten wohl hier. [5] Tabelle 1 faßt ausgewählte Kurskennzahlen dieser Papiere zusammen. Die durchschnittlichen jährlichen Renditen sind dabei als

$$\left(\frac{\text{Kurs am 30.12.91}}{\text{Kurs am 4.1.60}}\right)^{\frac{1}{32}} - 1 \qquad (8)$$

[5] Weitere Kandidaten für Kointegration sind die großen Banktitel, oder Stamm- und Vorzugsaktien der gleichen Gesellschaft. Diese a–priori–Auswahl der untersuchten Werte ist wichtig, um sog. "data–mining" zu vermeiden: Würde man rein mechanisch alle Teilmengen etwa der im Frankfurter Amtlichen Handel notierten mehr als 400 Titel auf Kointegration testen, wäre die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht mehr zu kontrollieren; auch eine korrekte Nullhypothese "Keine Kointegration" würde oft, wenn auch zu Unrecht, abgelehnt (Fehler 1. Art), damit zu Unrecht auf Kointegration erkannt. Auf diese Weise kommen vermutlich die meisten "signifikanten" Kointegrationsbeziehungen in MacDonald und Power (1993) zustande.

und die jährlichen Volatilitäten als das Produkt der Wurzel der Börsentage per annum mit der Standardabweichung der täglichen Renditen berechnet.

Abb. 3 zeigt beispielhaft den (retrograd bereinigten und logarithmierten) Kurs von BASF: die Ähnlichkeit mit dem künstlich erzeugten Random Walk aus Abb. 1 ist nicht zu übersehen und wird wie bei den anderen Werten auch durch formale Einheitswurzeltests bestätigt. Abb. 4 zeigt die Kurse von Hoechst und Bayer simultan (ähnlich auch die übrigen Kurvenpaare; Beschränkung auf zwei Werte, um die Graphik nicht zu überladen). Der reine Augenschein läßt Kointegration vermuten: Trotz individueller stochastischer Trends bleiben beide Reihen eng beisammen.

Alternativ zeigt Abb. 5 die logarithmierten Kurse von Bayer und Hoechst in einem bivariaten, Abb. 6 alle drei Kurse zusammen in einem trivariaten Streudiagramm. Neben der Kointegrationsbeziehung als solcher wird in diesen Diagrammen zusätzlich noch die Gerade deutlich (der "Attraktor" in der Notation von Granger 1986), zu dem die Wertepaare bzw. Wertetripel quasi hingezogen werden. Auch aus dieser Sicht ist Kointegration nicht unwahrscheinlich.

Es gibt verschiedene formale Tests zur Prüfung, ob dieser Augenschein nicht trügt, d.h. ob oder ob nicht die Nullhypothese "es gibt keine Kointegration" im Licht der Daten verworfen werden muß. Die ersten, von Engle und Granger (1987) vorgeschlagenen Methoden nutzen die Idee, daß bei Geltung von H_0, d.h. bei Abwesenheit von Kointegration, keine stationäre Linearkombination $c'y_t$ der zur Debatte stehenden Variablen $y_t^{(1)}, \cdots, y_t^{(n)}$ existieren darf. Mit anderen Worten, das statistische Testen der Nullhypothese "keine Kointegration" läuft auf das Testen der Hypothese "stochastischer Trend alias Einheitswurzel in $z_t = c'y_t$" hinaus.

Im weiteren werden daher verschiedene gängige Einheitswurzeltests auf ausgewählte Linearkombinationen der logarithmierten Kurse angewandt:[6] Der Dickey–Fuller–Test (DF), der Dickey–Fuller–t–Test (DFt), der "Augmented" Dickey–Fuller–Test (ADF), die Z_α und Z_t–Tests von Phillips (1987) und der P_u–Test von Phillips und Ouliaris (1990) (siehe auch Hamilton 1994, Kap. 19 und 20 oder Fuller 1996, Kap.10 für Einzelheiten).

Der Dickey–Fuller–Test basiert auf der Prüfgröße

$$T(\hat{\rho} - 1) \tag{9}$$

mit $\hat{\rho}$ die Kleinst–Quadrate–Schätzung für ρ in

$$z_t = \rho z_{t-1} + u_t, \tag{10}$$

und der Dickey–Fuller–t–Test ist der Standard t–Test von $H_0 : \rho = 1$ in (10) mit Prüfgröße

$$\frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\sigma}}}. \tag{11}$$

Beide Verfahren halten ihr Signifikanzniveau nur bei unabhängigen u_t's; sie werden bei potentiell korrelierten Störgrößen durch allgemeinere Tests ersetzt: der "Augmented" Dickey–Fuller–Test hat die gleiche Prüfgröße (11) wie der Dickey–Fuller–t–Test, nimmt aber in (11) noch m verzögerte Werte von Δz_t in der rechten Seite auf (im weiteren $m = 1 \ldots 7$); die Z_α– und Z_t–Tests von Phillips addieren einen geeigneten Korrekturfaktor zu (9) bzw. (11), der ebenfalls die Auswirkungen korrelierter Störgrößen in der Regressionsbeziehung (10) asymptotisch konterkariert, und der P_u–Test von Phillips und Ouliaris

[6] Mittels der Statistik–Software Coint 2.0, einer Sammlung einschlägiger Gauss–Programme von Ouliaris und Phillips (1994).

(1990) vergleicht im wesentlichen zwei autokorrelationsrobuste Schätzungen für die Varianz der $z_t = c'y_t$: Bei Abwesenheit von Kointegration haben diese Schätzungen den gleichen Grenzwert (nach geeigneter Normierung), die Prüfgröße konvergiert, bei Kointegration divergieren diese Schätzungen, damit auch die Prüfgröße, die Nullhypothese "keine Kointegration" wird abgelehnt.

Eine erste Serie von Tests benutzt die a priori fixierten Kointegrationsvektoren

$$c^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad c^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

d.h. es wird getestet, ob paarweise Differenzen der logarithmierten Kurse als integrierte Prozesse modellierbar sind.

Dieser a–priori–Auswahl der potentiellen Kointegrationsvektoren lagen einmal optische Hinweise aus Abb. 4 (und ähnlichen, hier nicht wiedergegebenen Abbildungen anderer Kurspaare), aber auch sachlogische Argumente zugrunde: In dem Umfang, wie zwei Unternehmen als Kopien voneinander gelten können, sollten sich ihre Aktienkurse proportional entwickeln, etwa

$$\text{Bayer} = \alpha \times \text{ Hoechst } \times \text{ stochastische Abweichung (Störung)},$$

d.h.

$$\ell\text{n(Bayer)} = \ell\text{n}(\alpha) + \ell\text{n(Hoechst)} + \ell\text{n(Störung)}. \tag{12}$$

Die Kointegrationsbeziehung ist also gerade die Differenz.

Tabelle 2 zeigt die Prüfgrößen des Augmented Dickey–Fuller–Tests [7] zusammen mit den Schätzungen für ρ. Unabhängig von der Anzahl der verzögerten

[7] Auf die Wiedergabe der Standard–Dickey–Fuller Tests wird hier verzichtet; wegen Korrelation der u_t's unter H_0 sind deren Aussagen bei Kointegrationsresiduen nur schwer zu interpretieren.

Δz_t auf der rechten Seite von (10) (in der Tabelle m genannt) kann die Hypothese "keine Kointegration" für die Paare Bayer–BASF und Bayer–Hoechst nicht verworfen werden. Bemerkenswert auch die Robustheit der Schätzungen für ρ, die sich bei Aufnahme weiterer Regressoren in die Gleichung (10) erst ab der vierten Nachkommastelle ändern und deshalb in der Tabelle als konstant erscheinen.

Alternativ zur Autokorrelationsadjustierung durch den Augmented Dickey–Fuller–Test zeigt Tabelle 3 die Z_α– und Z_t–Tests von Phillips (1987), die die Auswirkungen potentiell korrelierter Störgrößen in (10) durch Korrekturfaktoren an den Prüfgrößen (9) und (11) abfangen. Auch hier ergibt sich ein gemischtes Bild: Für einige Tests und Wertepaare wird die Hypothese "keine Kointegration" verworfen, für andere dagegen nicht.

Um dem Einwand zu begegnen, diese fehlende Eindeutigkeit könnte auf einer falschen Wahl der a priori festgelegten Kointegrationsvektoren beruhen, wurde in einer weiteren Serie von Tests der Kointegrationsvektor durch die Daten selbst bestimmt. Dazu werden alle drei Kursreihen auf die jeweils anderen regressiert, und die Residuen dieser Regression den gleichen Einheitswurzeltests wie in den Tabellen 2 und 3 unterworfen.

Tabelle 4 zeigt das Resultat für den Augmented Dickey Fuller Test (die Resultate für die Tests von Phillips sind ähnlich und werden hier nicht eigens referiert): Zwar nehmen die Ablehnungen der Hypothese "keine Kointegration" zu, aber von einer einhelligen Akzeptanz von Kointegration kann noch immer keine Rede sein (in Tabelle 4 sind zusätzlich noch die geschätzten Regressionskoeffizienten angegeben).

Ein großer, auch in diesen Tabellen manifester Nachteil dieser auf geschätzten Residuen basierenden Einheitswurzeltest ist die Abhängigkeit der Prüfgröße von der Wahl des Regressanden, d.h. die Normierung des Kointegrationsvektors c. Da dieser, falls existent, nur bis auf skalare Vielfache festliegt, wird bei seiner empirischen Bestimmung eine seiner Komponenten willkürlich auf 1 normiert; diese Komponente bestimmt zugleich den Regressanden in der Kointegrationsregression. Obwohl asymptotisch unerheblich (bei einem von Null verschiedenen wahren Koeffizienten des Regressanden konvergieren die Schätzungen immer gegen ein Vielfaches von c), hängt das Test-Ergebnis in endlichen Stichproben von dieser Normierung ab.

Um auch diesem Einwand zu begegnen, zeigt Tabelle 5 noch die Resultate dreier nicht–residuengestützter Tests auf Kointegration; die ersten beiden vergleichen im wesentlichen Eigenwerte von verschieden geschätzten theoretischen Kovarianzmatrizen: Der Phillip–Ouliaris P_z–Test die normierten Eigenwerte zweier empirischer Kovarianzmatrizen des Variablenvektors y_t, der Stock–-Watson–Test (1988) die zweier Autokovarianzmatrizen erster Ordnung von y_t. Der Johansen–Test schließlich ist ein unter der Annahme normalverteilter Innovationen berechneter Likelihood–Quotienten–Test gegen die Alternative "es gibt genau einen kointegrierenden Vektor" (siehe Hamilton, 1994, Kap. 20 für Details). Auch hier ein gemischtes Bild: zwei Tests lehnen ab, einer (Johansen) dagegen nicht.

Als Fazit dieser formalen Tests bleibt damit zu konstatieren, daß die Hypothese "keine Kointegration" je nach Test durchaus verworfen werden kann, aber doch nicht so eindeutig und jenseits allen Zweifels, wie der erste Augenschein erwarten läßt: bei einer Stichprobe des Umfangs > 7000, bei der selbst kleinste Verletzungen der Nullhypothesen zu statistisch signifikanten Testresultaten führen, bedarf die fehlende Eindeutigkeit einer Erklärung.

4 Fraktionale Kointegration

Die mangelnde Eindeutigkeit der Diagnose ”Kointegration” für die hier untersuchten Daten kann zwei Gründe haben: (i) die Kointegrationsvektoren können die nichtstochastischen Komponenten der logarithmierten Kursreihen nicht annulieren: $c'g(t) \neq 0$, oder (ii) die Kointegrationsresiduen verhalten sich anders als in den Standardtests vorausgesehen.

Im weiteren ist Erklärung (i) aus a–priori–Gründen auszuscheiden: auch wenn man zeitvariable erwartete Renditen zuläßt, werden diese quer zur Zeit für die hier betrachteten Dividendenwerte nahezu identisch sein: bei identischem Beta (siehe Tabelle 1) und auch sonst vergleichbarer Unternehmensstruktur gibt es keinen Anlaß, hier systematische Differenzen zu vermuten; zumindest für die Kointegrationsvektoren $c \in \{ [-1\ 1\ 0], [\ -1, 0, 1]$ und $[0, -1, 1]\}$ dürfte damit $c'g(t) = 0$ für alle t zu unterstellen sein.

Im weiteren steht daher Erklärung (ii) im Mittelpunkt. Die Standard–Kointegrationsmethodologie geht davon aus, daß die fragliche Linearkombination $c'y_t$ der Ausgangsvariablen $y_t^{(1)}, \ldots, y_t^{(n)}$ im Kointegrationsfall als stationärer ARMA–Prozeß modellierbar ist ($c'y_t \sim I(0)$); bei Abwesenheit von Kointegration dagegen ist $c'y_t$ integriert der Ordnung 1.

Diese Dichotomie ist unnötig und unrealistisch strikt; es erscheint sowohl möglich als auch im Kontext der hier untersuchten Kurse sogar hoch wahrscheinlich, daß gewisse Linearkombinationen $c'y_t$ der integrierten Ausgangsdaten zwar stationäre und stochastisch beschränkte, aber <u>nicht</u> ARMA–modellierbare stochastische Prozesse sind. Diese Möglichkeit wurde bereits von Granger (1986, S. 222) durchaus gesehen, aber als wenig wichtig abgetan; von wenigen Ausnahmen abgesehen (siehe etwa Cheung und Lai 1993 im Kontext von Kaufkraftparitäten) sind in empirischen Kointegrationsanalysen für die Kointegrationsresiduen nur die Alternativen $I(0)$ oder $I(1)$ erlaubt.

Die hier untersuchten Daten deuten aber darauf hin, daß die Kointegrationsresiduen besser als integriert der Ordnung d ($I(d)$) mit $0 < d < 1$ zu modellieren sind. Dabei heißt ein stochastischer Prozeß $\{z_t\}$ fraktional integriert oder integriert der Ordnung d, wenn $\Delta^d z_t \sim I(0)$ mit

$$\Delta^d = (1-L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i L^i. \tag{13}$$

Dabei ist $Lz_t = z_{t-1}$ der Lag–Operator und

$$\pi_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{j-1-d}{j} \tag{14}$$

(siehe Hassler 1993 oder Schlittgen/Streitberg 1994, S. 142). Für $d < 0,5$ sind fraktional integrierte Prozesse stationär (genauer: gibt es eine stationäre Lösung der stochastischen Differenzengleichung $\Delta^d z_t = u_t$ mit $u_t \sim \mathrm{ARMA}(p,q)$).

Die folgenden Eigenschaften setzen fraktional integrierte Prozesse von ARMA–Prozessen ab.

(i) für $0 < d$ gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} |E(z_t z_{t-i})| = \infty$ (in diesem Sinn haben fraktional integrierte Prozesse ein "langes Gedächtnis"; für stationäre ARMA–Prozesse gilt $\Sigma |E(z_t z_{t-i})| < \infty$).

(ii) die Autocovarianzen $E(z_t z_{t-i})$ klingen nur sehr langsam ab; sie verhalten sich für große i wie i^{2d-1} (bei stationären ARMA–Prozessen ist der Abfall dagegen exponentiell).

(iii) die Spektraldichte hat eine Polstelle bei 0 (bei stationären ARMA–Prozessen ist die Spektraldichte eine auf dem ganzen Intervall [-0,5; 0,5] stetige Funktion).

Abb. 7 zeigt beispielhaft die ersten 100 Autokorrelationen der Kointegrationsresiduen ℓn(Bayer) – ℓn(Hoechst): Diese Autokorrelationen klingen nur langsam ab; selbst bei 100 Tagen Abstand ist die Autokorrelation noch größer als 0,8.

Abb. 8 zeigt die empirische Spektraldichte von ℓn(Bayer) – ℓn(Hoechst); auch hier das gleiche Bild: die Graphik suggeriert eine Polstelle bei 0, d.h. ein fraktional integrierter Prozeß scheint für die Kointegrationsresiduen das bessere Modell zu sein.

Tabelle 6 zeigt ausgewählte Schätzungen für d, die mit einem von Geweke/Porter–Hudak vorgeschlagenen Verfahren ermittelt worden sind: dieses Verfahren nutzt die Tatsache, daß sich die Spektraldichte $f(\lambda)$ eines fraktional integrierten Prozesses schreiben läßt als

$$f(\lambda) = \left(4\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{-d} \times g(\lambda). \tag{15}$$

Durch Logarithmieren erhält man

$$\ell\mathrm{n} f(\lambda) = \ell\mathrm{n}\,(\,g(0)) - d\,\ell\,\mathrm{n}\left(4\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) + \ell\mathrm{n}\,(\,g(\lambda)/g(0))\,, \tag{16}$$

wobei der letzte Term für kleine λ vernachlässigt werden darf. Für kleine harmonische Frequenzen λ_j (etwa $j \leq \sqrt{T}$) erhält man damit durch Addition des Periodogramms $I(\lambda_j)$:

$$\ell\mathrm{n}\,(\,I(\lambda_j)) = \ell\mathrm{n}\,(\,g(0)) - d\,\ell\,\mathrm{n}\left(4\sin^2\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right) + \ell\mathrm{n}\left(\frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j)}\right), \tag{17}$$

wobei der letzte Term stochastisch um 0 variiert, und der Parameter d durch eine KQ–Regression von $\ell\mathrm{n}\,(\,I(\lambda_j))$ auf $\ell\mathrm{n}\,\left(4\sin^2(\lambda_j/2)\right)$ geschätzt werden kann.

Tabelle 6 zeigt die Ergebnisse dieses Verfahrens, angewandt auf die Kointegrationsresiduen bei konstanten und geschätzten Kointegrationsvektoren: die geschätzten d sind durchweg positiv, hängen allerdings vom Umgang der Hilfsregression (alternativ die $m = 50$ oder $m = 100$ kleinsten harmonischen Frequenzen, ohne die ersten 20) und auch von den jeweiligen Residuenreihen ab.

Alternativ wurde der Parameter d auch durch die zuerst von Mandelbrot (1969) für Wirtschaftsdaten vorgeschlagene "Range–Scale–Analyse" geschätzt. Sei dazu

$$z_t^* := \sum_{i=1}^{t} z_i \quad (t = 1\,, \ldots, T) \tag{18}$$

der Prozeß der sukzessiven kumulierten Summen des Ausgangsprozesses z_t, sei

$$\begin{aligned} R(t,k) \;&:=\; \max_{0 \leq i \leq k} \left[z_{t+i}^* - \left(z_t^* + \left(\frac{i}{k}\right) \left(z_{t+i}^* - z_t^* \right) \right) \right] \\ &\;-\; \min_{0 \leq i \leq k} \left[z_{t+i}^* - \left(z_t^* + \left(\frac{i}{k}\right) \left(z_{t+i}^* - z_t^* \right) \right) \right] \end{aligned} \tag{19}$$

die im Intervall von t bis $t+k$ realisierte Spannweite der kumulierten Summen um einen linearen Trend (siehe Abb. 9), und sei $S(t,k)$ die Standardabweichung der $z_{t+i}^* (i = 0\,, \ldots, k)$. Dann ist der "rescaled range" $R/S := R(t,k)/S(t,k)$ für große k proportional zu $k^{0,5+d}$:

$$R/S \sim \text{Konstante} \times k^{0,5+d}, \tag{20}$$

und

$$\ell\text{n}(R/S) \approx \ell\text{n}(\text{Konstante}) \;+\; (0,5+d)\ell\text{n}(k). \tag{21}$$

Abb. 10 illustriert dieses Grenzverhalten für $z_t = \ell\text{n}(\text{Bayer}) - \ell\text{n}(\text{Hoechst})$: die realisierten Werte von R/S liegen für großes k auf einer Geraden mit einer Steigung von knapp unter 1, d.h. der Integrationsparameter d liegt knapp unter 1/2.

Dieses Ergebnis wurde durch analoge R/S–Analysen der übrigen Kointegrationsresiduen bestätigt. Damit ist als Fazit dieses Abschnitts festzuhalten, daß konventionelle Kointegrationsmethoden im Kontext von Aktienkursen nicht mehr greifen; zwar scheinen durchaus stochastisch beschränkte Linearkombinationen der Kursreihen zu existieren, aber diese zeigen weit höhere als mit ARMA–Modellen verträgliche Langfristkorrelationen und sind besser als fraktional integrierte Prozesse zu modellieren. [8]

Damit erklärt sich auch die zögerliche Ablehnung der Nullhypothese "Keine Kointegration" bei vielen Tests: Bei fraktionalen Alternativen haben Einheitswurzeltests nur wenig Macht, d.h. ein Fehler 2. Art kommt hier besonders häufig vor (siehe Diebold und Rudebusch 1991, Hassler und Wolters 1994 oder Krämer 1997).

5 Überrenditen durch Handelsstrategien

Das wichtigste Ergebnis der ersten vier Abschnitte ist: auch wenn formale Kointegrationstests keine "klassischen"Kointegration der deutschen Großchemie erkennen, scheinen gewisse Linearkombinationen dieser Werte dennoch stochastisch beschränkt zu bleiben, konkret: durch stationäre fraktional integrierte Prozesse modellierbar zu sein.

Diese Stationarität impliziert aber "mean reversion", d.h. aus (beispielsweise)

$$\ell\text{n}(\text{Bayer}) - \ell\text{n}(\text{Hoechst}) \sim I(d)$$

[8] Wegen der Fehlerkorrekturdarstellung (6) folgt daraus zugleich die $I(d)$–Eigenschaft der Renditen selbst, und die logarithmierten Kures selbst sind nicht $I(1)$. Ich danke Jürgen Wolters für diesen wichtigen Hinweis. Jedoch ist diese nicht–$I(1)$–Komponente in den Kursen minimal, sie bleibt bei allen Tests auf Einheitswurzeln unentdeckt.

folgt, daß bei $\ell n(\text{Bayer}) > \ell\, n(\text{Hoechst})$ die künftigen Renditen von Hoechst die von Bayer übersteigen werden, und umgekehrt: bei $\ell n(\text{Bayer}) < \ell\, n(\text{Hoechst})$ wird Bayer die höheren Renditen zeigen.

Auf einer weniger formalen Ebene ist dieser Sachverhalt vielen Investoren wohlbekannt: die meisten auf Portfolioumschichtungen beruhenden Handelsstrategien laufen auf das Ausnutzen von derartigen Kointegrationsbeziehungen hinaus. So sind etwa die von Schiereck und Weber (1995) oder Bromann et al. (1997) untersuchten Handelsstrategien als implizites Auswerten von Kointegrationsbeziehungen zwischen deutschen Dividendenwerten zu verstehen, und auch das periodische Umgewichten einzelner Länder in internationalen Anlageportfolios kann man als angewandte Kointegrationsanalyse begreifen. [9]

Tabelle 7 zeigt Gesamtrenditen von Anfang 1960 bis Ende 1991 bei bilateralen Portfolioumschichtungen: Es stehen jeweils zwei Werte zur Debatte, Anfang 1960 wird der billigere in das Portfolio eingestellt. [10] Dort bleibt er, bis sein Kurs den Konkurrenten um $\varepsilon\%$ übersteigt, dann wird getauscht. Die Tabelle zeigt die so erzielten Gesamtrenditen für $\varepsilon = 0{,}1, 2, 3, 4, 5$ und für verschiedene prozentuale Transaktionskosten: $0\%; 0,5\%; 2,5\%$. Ebenfalls angegeben ist die Anzahl der Portfolioumschichtungen, die bei dieser Regel nötig werden. Wie diese Zahlen zeigen, ist ab einer kritischen Handelsschranke $1 + \varepsilon = 1{,}03$ eine aktive Handelsstrategie einem buy–hold–Verhalten selbst bei Transaktionskosten von $2,5\%$ pro Umschichtung für alle Wertepaare vorzuziehen: in allen Fällen ergibt aktives Handeln eine höhere als maximal bei einer buy–and–hold–Strategie erzielbare Gesamtrendite (519% für Bayer; s. Tabelle 1).

[9] Bei den meisten dieser Handelsstrategien sind allerdings die Tauschzeitpunkte a priori fest; bei den hier untersuchten Strategien sind sie dateninduziert.

[10] Implizit wird dabei untestellt, ein Investor 1960 hätte wissen können, welches 1992 die bei retrograder Bereinigung billigste Anlage sein würde. In praxi wäre zunächst die Größe $\ell(\alpha)$ aus (12) aus einer Vor–Stichprobe zu schätzen, dann stünde die billigere der beiden Aktien fest, das gesamte Vermögen würde in diesen Wert investiert und bei Tauschsignalen völlig umgeschichtet.

Tabelle 8 zeigt die Renditen bei zwei alternativen, alle drei Werte simultan erfassenden Strategien. Strategie I verfährt dabei wie folgt: kaufe billigsten der drei Werte, tausche gegen billigeren, falls Kurs $> (1 + \varepsilon)$ (Minimum der beiden anderen Kurse); bei Strategie II wird dagegen nur getauscht, falls Kurs $> (1 + \varepsilon)$ (Maximum der beiden anderen Kurse). Wie die Tabelle zeigt, sind auch hier beträchtliche Überrenditen zu erzielen.

6 Fazit und Ausblick

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit sind: (1) zwischen gewissen deutschen Aktienkursen scheinen Kointegrationsbeziehungen vorzuliegen, (2) die aus diesen Kointegrationsbeziehungen resultierenden Residuen lassen sich mit konventionellen ARMA–Modellen schlecht beschreiben und (3) diese Kointegrationsbeziehungen lassen sich dennoch für Handelsstrategien nutzen, die den Markt zu schlagen scheinen. Da sich sowohl das Beta als auch die Volatilitäten der aus diesen Handelsstrategien resultierenden Portfolios kaum von denen der Einzelwerte unterscheiden — zu jedem Zeitpunkt ist genau einer der drei Werte im Portfolio — scheint dieses Phänomen auch nicht durch Zusatzrisiko erklärbar.

Eine vorläufige ex–ante Betrachtung scheint diese ex–post Sicht der Dinge zu bestätigen: die Rendite des am Ende der Stichprobe billigsten Wertes (BASF) hat seither (d.h. von Januar 1992 bis September 1997) die Rendite des am Ende der Stichprobe teuersten Wertes (Bayer) geschlagen: 228 Prozent verglichen mit 181 Prozent. Innerhalb dieser Zeitspanne haben sich die Kurse nicht gekreuzt, es wäre keine Umschichtung erfolgt.

Für eine systematische ex–ante Analyse wären aber auch die Kointegrationskandidaten — hier im Rückblick ausgewält — durch a priori Überlegungen zu finden (etwa Stamm– und Vorzugsaktien der gleichen Gesellschaft). Diese Analysen sind zur Zeit in Arbeit. Erst wenn auch dann noch Überrenditen erzielbar blieben, wäre Kointegration endgültig als Indikator eines ineffizienten Marktes anzusehen.

Literatur

Bromann, O.; Schiereck, D. und Weber, M. (1997): "Reichtum durch (anti–) zyklische Handelsstrategien am deutschen Aktienmarkt?" *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 49, 603 – 616.

Campbell, J.Y.; Lo, A.W. und MacKinlay, A.C. (1997): *The econometrics of financial markets*, Princeton (Princeton University Press).

Cherchi, M. and Havenner, A. (1988): "Cointegration and stock prices." *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, 333 - 346.

Cheung, Y.W. und Lai, K.S. (1993): "A fractional cointegration analysis of purchasing power parity." *Journal of Business and Economic Statistics* 11, 103 – 112.

Corhay, A.A.; Tourani, R. und Urbain, J.P. (1993): "Common stochastic trends in European stock markets." *Economics Letters* 42, 385 – 390.

Diebold, F. und Rudebusch, G.D. (1991): "On the power of Dickey–Fuller–Tests against fractional alternatives." *Economics Letters* 35, 155 – 160.

Dwyer, G.P. und Wallace, M.S. (1992): "Cointegration and market efficiency." *Journal of International Money and Finance* 11, 318 – 327.

Engle, R. und Granger, C.W.J. (1987): "Cointegration and error correction: representation, estimation and testing." *Econometrica* 55, 176 – 251.

Fama, E. (1970): "Efficient capital markets: A review of theory and empirical work." *Journal of Finance* 25, 383 – 417.

Fuller, W.A. (1996): *Introduction to statistical time series.* 2. Auflage, New York (Wiley).

Geweke, J. and Porter–Hudak, S. (1983): "The estimation and application of long memory time series models." *Journal of Time Series Analysis* 4, 221 – 238.

Granger, C.W.J. (1986): "Developments in the study of cointegrated economic variables." *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 48, 213 – 238.

Hamilton, J.P. (1994): *Time Series Analysis.* Princeton (Princeton University Press).

Hassler, U. (1992): *Fraktional integrierte Prozesse in der Ökonometrie*, Frankfurt (Haag und Herchen).

Hassler, U. und Wolters, J. (1994): "On the power of unit root tests against fractional alternatives." *Economics Letters* 45, 1 – 5.

Hosking, J.R.M. (1981): "Fractional Differencing." *Biometrika* 68, 165 – 176.

Kasa, K. (1992): "Common stochastic trends in international stock markets." *Journal of Monetary Economics* 29, 95 – 124.

Krämer, W. (1997): "Fractional integration and the Augmented Dickey–Fuller test." Technical Report No. 6, SFB 475, Universität Dortmund.

Krämer, W. und Runde, R. (1996): "Stochastic properties of German stock returns." *Empirical Economics* 21, 281 – 306.

LeRoy, St. (1989): "Efficient capital markets and martingales." *Journal of Economic Literature* 27, 1583 – 1621.

Lütkepohl, H. (1995): "Kointegration und gemeinsame Trends." In: Oppenländer, K.H. (Hrsg.): *Konjunkturindikatoren*, München (Oldenburg).

MacDonald, R. und Power, D. (1993): "Stock prices, efficiency and cointegration: the case of the U.K.." *International Review of Economics and Finance* 2, 251 – 265.

Mandelbrot, B. (1969): "Long run linearity, locally Gaussian processes, H–spectra and infinite variances." *International Economic Review* 10, 82 – 111.

Ouliaris, S. und Phillips, P.C.B. (1994) : *Coint 2-0: Gauss Procedures for cointegrated regressions*, ohne Ort.

Phillips, P.C.B. (1987): "Time series regression with a unit root." *Econometrica* 55, 277 – 301.

Phillips, P.C.B. und Ouliaris, S. (1990): "Asymtotic properties of residual based tests for cointegration." *Econometrica* 58, 165 – 193.

Richards, A.J. (1995): "Comovements in national stock market returns: evidence of predictability, but not cointegration." *Journal of Monetary Economics* 36, 631 – 654.

Saunders, E.M. (1993): "Stock prices and Wall Street weather." *American Economic Review* 83, 1337–1345.

Schiereck, D. und Weber, M. (1995): "Zyklische und antizyklische Handelsstrategien am deutschen Aktienmarkt." *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 47, 3 – 24.

Schlittgen, R. und Streitberg, B. (1994): *Zeitreihenanalyse* (5. Auflage), München (Oldenbourg).

Stengos, T. und Panas, E. (1992): "Testing the efficiency of the Athens stock exchange: Some results from the banking sector." *Empirical Economics* 17, 239 – 252.

Stock, J. und Watson, M.K. (1988): "Testing for common trends." *Journal of the American Statistical Association* 83, 1097 – 1107.

Taylor, M.P. and Tonks, I. (1989): "The internationalisation of stock markets and the abolition of U.K. exchange controls." *Review of Economics and Statistics*, 332 – 336.

Tabelle 1: Ausgewählte Kurskennzahlen

	BASF	Bayer	Hoechst
Kassa–Kurs 30.12.1991	219,60	277,60	222,00
retrograd bereinigter Kurs 4.1.1960	39,94	44,69	36,72
Gesamtrendite über 32 Jahre:	449,8%	521,2%	504,6%
durchschn. jährl. Rendite b. Operation Blanche	5,5%	5,9%	5,8%
Volatilität (jährlich)	17,9%	18,6%	17,7%
Beta	0,68	0,68	0,69
größter Kursgewinn an einem Tag	8,86%	8,87%	8,90%
Datum	29.10.1962	29.05.1970	29.10.1962
größter Kursverlust an einem Tag	-10,7%	-8,8%	-11,5%
Datum	16.10.1989	19.08.1991	19.08.1991

Tabelle 2: Augmented Dickey-Fuller-Tests bei a priori fixierten Kointegrationsvektoren (kritischer 5%-Wert = -2.86)

m	Schätzung für ρ	Prüfgröße
	a) ℓn(Bayer) – ℓn(Hoechst)	
1	0.998	-2.61
2	0.998	-2.63
3	0.998	-2.63
4	0.998	-2.62
5	0.998	-2.55
6	0.998	-2.56
7	0.998	-2.50
	b) ℓn(Hoechst) – ℓn(BASF)	
1	0.996	-3.84
2	0.996	-3.90
3	0.996	-3.90
4	0.996	-3.98
5	0.996	-3.88
6	0.996	-3.89
7	0.996	-3.90
	c) ℓn(Bayer) – ℓn(BASF)	
1	0.998	-2.21
2	0.998	-2.31
3	0.998	-2.33
4	0.998	-2.29
5	0.998	-2.26
6	0.998	-2.26
7	0.998	-2.26

Tabelle 3: Die Z_α und Z_t–Tests von Philips bei a priori fixierten Kointegrationsvektoren (kritischer 5% Wert in Klammern)

Kointegrationsbeziehung	Schätzung für ρ	Prüfgröße
a) Z_α–Test (-8.1)		
ℓn(Bayer) – ℓn(Hoechst)	0.998	-9.96
ℓn(Hoechst) – ℓn(BASF)	0.997	-20.34
ℓn(Bayer) – ℓn(BASF)	0.999	-8.32
b) Z_α–Test mit Absolutglied (-14.1)		
ℓn(Bayer) – ℓn(Hoechst)	0.998	-9.99
ℓn(Hoechst) – ℓn(BASF)	0.996	-24.99
ℓn(Bayer) – ℓn(BASF)	0.998	-9.10
c) Z_t–Test (-1.95)		
ℓn(Bayer) – ℓn(Hoechst)	0.998	-2.19
ℓn(Hoechst) – ℓn(BASF)	0.997	-3.23
ℓn(Bayer) – ℓn(BASF)	0.999	-1.91
d) Z_t–Test mit Absolutglied (-2.86)		
ℓn(Bayer) – ℓn(Hoechst)	0.998	-2.19
ℓn(Hoechst) – ℓn(BASF)	0.996	-3.54
ℓn(Bayer) – ℓn(BASF)	0.998	-1.96

Tabelle 4: Augmented Dickey-Fuller-Tests auf Einheitswurzel in den Kointegrationsresiduen bei geschätzten Kointegrationsvektoren (kritischer 5%-Wert = -3.76)

m	Schätzung für ρ	Prüfgröße
a) ℓn(Bayer)= –0,38 + 0,42 ℓn(Hoechst) + 0,66 ℓn(BASF) + Residuum		
1	0.998	-2.89
2	0.998	-2.95
3	0.998	-2.97
4	0.998	-2.93
5	0.998	-2.90
6	0.998	-2.90
7	0.998	-2.82
b) ℓn(Hoechst)= –0,17 + 0,17 ℓn(Bayer) b+ 0,85 ℓn(BASF) + Residuum		
1	0.996	-4.05
2	0.996	-4.08
3	0.996	-4.06
4	0.996	-4.16
5	0.996	-4.04
6	0.996	-4.06
7	0.996	-4.04
c) ℓn(BASF)= 0,35 + 0,70 ℓn(Hoechst) + 0,23 ℓn(Bayer) + Residuum		
1	0.996	-4.22
2	0.995	-4.31
3	0.995	-4.29
4	0.995	-4.36
5	0.995	-4.29
6	0.995	-4.29
7	0.995	-4.31

Tabelle 5: Nicht–Residuengestützte Tests auf Kointegration*

Test	Prüfgröße	kritischer 5 % Wert
Phillips/Ouliaris P_z	109.46	89.87
Stock/Watson	36.77	30.80
Johansen (max EW)	19.32	21.28

* Ablehnung, falls Prüfgröße > kritischer Wert.

Tabelle 6: Schätzung des fraktionalen Integrationsparameters nach Geweke/Porter–Hudak

Residuen	Schätzung für d	
	m = 50	m = 100
ℓn(Bayer) $-\ell$n(Hoechst)	0,41	0,69
ℓn(Bayer) $-\ell$n(BASF)	0,43	0,84
ℓn(Hoechst) $-\ell$n(BASF)	0.41	0.65
ℓn(Bayer) $+0,38-0,42$ ℓn(Hoechst) $-0,66$ ℓn(BASF)	0,56	1,07
ℓn(Hoechst) $+0,17-0,17$ ℓn(Bayer) $-0,85$ ℓn(BASF)	0,31	0,62
ℓn(BASF) $-0,35-0,25$ ℓn(Bayer) $-0,70$ ℓn(Hoechst)	0,51	0,70

Tabelle 7: Renditen 1960–1991 bei bilateralen Umschichtungen

	kritische Handelsschranke $1+\varepsilon$					
	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
	a) Bayer – BASF					
Umschichtungen	94	26	18	12	6	4
keine Transakt. Kosten	879%	902%	1028%	942%	785%	731%
0,5% Transakt. Kosten	511%	780%	931%	881%	759%	715%
2,5% Transakt. Kosten	-9%	419%	615%	669%	660%	651%
	b) BASF – Hoechst					
Umschichtungen	149	49	27	19	11	11
keine Transakt. Kosten	1477%	1280%	1202%	1247%	1019%	1136%
0,5% Transakt. Kosten	647%	979%	1037%	1125%	959%	1070%
2,5% Transakt. Kosten	-64%	299%	557%	733%	747%	836%
	c) Hoechst – Bayer					
Umschichtungen	138	36	16	14	8	6
keine Transakt. Kosten	1156%	1102%	913%	1007%	880%	845%
0,5% Transakt. Kosten	529%	904%	835%	932%	841%	817%
2,5% Transakt. Kosten	-62%	383%	576%	677%	700%	712%

Tabelle 8: Renditen 1960–1991 bei trilateralen Umschichtungen

	kritische Handelsschranke $1+\varepsilon$					
	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
	a) Strategie I					
Umschichtungen	222	67	39	31	15	12
keine Transakt. Kosten	1940%	1707%	1668%	1937%	1251%	1205%
0,5% Transakt. Kosten	570%	1192%	1354%	1644%	1153%	1129%
2,5% Transakt. Kosten	-93%	231%	559%	829%	824%	863%
	b) Strategie II					
Umschichtungen	8	7	7	5	5	4
keine Transakt. Kosten	1001%	1116%	1168%	1019%	990%	861%
0,5% Transakt. Kosten	958%	1074%	1124%	991%	963%	842%
2,5% Transakt. Kosten	799%	919%	962%	886%	860%	768%