

Regina BRUDER, Darmstadt; Andreas BÜCHTER, Dortmund;
Timo LEUDERS, Freiburg

Die "gute" Mathematikaufgabe - ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern

Aufgaben spielen eine zentrale Rolle bei der Unterrichtsgestaltung, daher ist die „gute Aufgabe“ immer wieder im Gespräch. Zu fragen ist dabei aber auch: „Wozu soll eine Aufgabe gut sein?“ Wie sehen geeignete Aufgaben für Leistungstests aus, welche Aufgaben können nachhaltige Lernprozesse initiieren, wie erstellt man Aufgaben zum Modellieren, Argumentieren, Problemlösen oder zum Begriffe bilden? Wir möchten einen Orientierungsrahmen für Forschung und Praxis vorstellen sowie Beispiele für das reflektierte Arbeiten mit Aufgaben in der Lehreraus- und -weiterbildung.

1. Funktionen und Merkmale von Aufgaben zum Lernen und Leisten

Auch wenn Aufgaben nicht mit Unterricht gleichzusetzen sind, so bilden sie doch die „Elementarteilchen“ für die Gestaltung und Auswertung von Mathematikunterricht. Sie sind (1) der typische Anlass für mathematische Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern (J. NEUBRAND 2002), dienen (2) zur Leistungsüberprüfung in Klassenarbeiten und zentralen Tests und sind (3) sowohl im Kreis von Fachkollegen einer Schule als auch in der Bildungspolitik das Medium der Verständigung über Anforderungen. Die Arbeit mit Aufgaben bildet schließlich (4) einen wesentlichen Kern in Modellversuchen zur Unterrichtsentwicklung (SINUS).

Insbesondere Punkt (3) gewinnt eine größere Bedeutung, nachdem das deutsche Schulsystem sich künftig stärker an den Ergebnissen von Unterricht in Form von gemessenen Schülerleistungen orientiert. Das führt auch dazu, dass Aufgaben, die Schülerleistungen beschreiben und erfassen, wie etwa Beispielaufgaben aus Lehrplänen oder Items aus zentralen Tests eine verstärkte Beachtung finden. Ein wesentlicher Aspekt des neuen Steuerungsmodells besteht darin, von Schulen Rechenschaft über ihre Arbeit zu verlangen und ihnen zugleich eine größere Autonomie auf dem Weg zu vorgegebenen Zielen zu geben. Der Schritt von formulierten Leistungsanforderungen an Schülerinnen und Schüler hin zur langfristigen Planung von Unterricht und zur Gestaltung von Lernprozessen wird durch die aktuellen Lehrplanformate daher auch bewusst nicht mehr beschrieben (BARZEL, HUBMANN & LEUDERS 2004). In dieser Hinsicht weicht die Entwicklung neuer Lehrpläne von den Empfehlungen der Expertise zur Konstruktion von Bildungsstandards (KLIEME u. a. 2003) und von den Vorbildmodellen, wie etwa den NCTM-Standards (NCTM 2000) ab.

Der Lehreraus- und -weiterbildung kommt daher aktuell eine besondere Rolle zu: Sie muss Lehrerinnen und Lehrer dabei unterstützen, die Brücke von den Kompetenzbeschreibungen und über Aufgaben konkretisierten Leistungsanforderungen hin zur Planung und Gestaltung reichhaltiger Lernumgebungen zu schlagen. Zu vermeiden sind dabei insbesondere kurz-schlüssige Reaktionen, wie etwa:

- die Übernahme von vermeintlich inhaltlichen Anforderungen aus Testaufgaben in einen impliziten Stoffkanon (vgl. z. B. die oberflächliche Routinisierung der Bestimmung von Inhalten krummlinig begrenzter Figuren in Anlehnung an die „Antarktisaufgabe“ aus PISA 2000),
- die Fokussierung auf die inhaltlichen Kerne unter Vernachlässigung prozessualer Kompetenzen wie Problemlösen, Argumentieren oder Modellieren,
- das oberflächliche Üben von Muster- und Modellaufgaben („Aufgabendidaktik“) ohne den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen oder
- das Vernachlässigen ergebnisoffener Aufgabenformate, die in Testaufgaben notwendigerweise unterrepräsentiert sind.

Wir möchten im Folgenden einen Orientierungsrahmen für Forschung und Praxis vorstellen, der pragmatische Kriterien und Verfahren zur Auswahl, zur Überarbeitung oder zur Neukonstruktion von Aufgaben mit Blick auf ihre jeweilige Funktion anbietet. Für einen reflektierten und sinnvollen Einsatz von Aufgaben ist vor allem eine Unterscheidung nach den Funktionen Lernen und Leisten von Bedeutung.

Aufgaben für das Lernen	Aufgaben für das Leisten
sind angelegt auf Offenheit, Divergenz, Prozesse, Lösungsvielfalt	sind angelegt auf Bewertbarkeit, Konvergenz, sichtbare Ergebnisse
sollen Fehler als Chance für das Lernen begreifen lassen	fordern eher das Vermeiden von Fehlern
erlauben bzw. unterstützen Kooperation und Kommunikation	fokussieren auf Einzelleistung
„Wichtig ist, was im Kopf stattfindet“ (Kompetenz)	„Wichtig ist, was Schüler zeigen“ (Performanz)
sind Aufgaben z. B. zum <ul style="list-style-type: none"> • Erkunden, Entdecken, Erfinden • Sammeln, Sichern, Systematisieren • Üben, Vernetzen, Wiederholen 	sind Aufgaben z. B. zum <ul style="list-style-type: none"> • Anwenden (Kompetenzerleben) • (Selbst)überprüfen sowie zur • Leistungsbewertung

Lehrerinnen und Lehrer sollen Aufgaben verstärkt auf ihre Funktion überprüfen und sie gegebenenfalls systematisch so modifizieren, dass sie Lern- bzw. Leistungssituationen gerecht werden. Für jeden dieser Funktionsbe-

reiche (Erkunden, Sammeln, Üben usw.) können verschiedene Aufgabentypen vorgeschlagen, Merkmale beschrieben und einfache Konstruktionsheuristiken angegeben werden.

Aufgaben werden seit jeher nach unterschiedlichen Merkmalen klassifiziert – Schemata für die Bewertung von Aufgaben für zentrale Leistungstests oder Bildungsstandards (vgl. Neubrand u.a. 2002, KMK 2003) reichen jedoch nicht aus, um auch Lernaufgaben nach obiger Klassifikation zu bewerten und weiter zu entwickeln. Für den Praxiskontext und für Aus- und Fortbildung schlagen wir drei zentrale Merkmale vor (diese Merkmale und auch die weiter unten skizzierten Prozesse werden in BÜCHTER/LEUDERS 2005 detailliert anhand konkreter Beispiele dargestellt):

- **Offenheit** beschreibt das Maß an Freiheit und Divergenz, das Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung zur Verfügung steht. Es steht eine Reihe von einfachen Öffnungstechniken (Weglassen, Umkehren) (vgl. BRUDER 2000, LEUDERS 2001) zur Verfügung
- **Differenzierungsvermögen** lässt sich bei Aufgaben auf unterschiedliche Weise herstellen: Aufgaben mit vorstrukturierter gestufter Schwierigkeit, also solche, bei denen Schülerinnen und Schüler nach eigenen Voraussetzungen und Bedürfnissen aus Alternativen auswählen können, sowie Aufgaben, die „natürlich differenzieren“, d. h. die jeder Schüler nach seinem Vermögen angehen kann (so z. B. bei „produktiven Übungsformaten“ wie beim „Blütenmodell“ s. u.).
- **Authentizität** bezieht sich hier nicht auf die Echtheit eines Kontextes, wie z. B. bei JAHNKE 2005, sondern auf die Qualität der durch die Aufgabe initiierten mathematischen Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler. In diesem Sinne kann auch eine weniger realitätsnahe Einkleidung der Zugänglichkeit einer Aufgabe dienen und zu authentischen Argumentations- oder Problemlöseprozessen führen (s. u.).

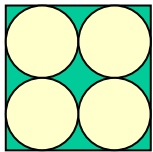
Jedes dieser Merkmale besitzt günstige und weniger günstige Ausprägungen je nachdem, welche Funktion die Aufgabe erfüllen soll. Durch Öffnung einer Aufgabe (z. B. „Zeichne ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 20 cm^2 “) lässt sich eine verfahrensorientierte Aufgabe zu einer das Verständnis mathematischer Begriffe und Zusammenhänge diagnostizierenden Aufgabe umformen. Bei Leistungsüberprüfungen kann die zu große Offenheit einer Aufgabe aber zu Auswertungsproblemen führen. Ebenso lässt sich Authentizität der Schülertätigkeit in Leistungssituationen nur in geringerem Maße verwirklichen, da solche Aufgaben bewusst Teilprozesse herausgreifen und überprüfen.

Das Zusammenspiel der genannten Funktionen und Merkmale lässt sich am besten an Aufgabenbeispielen demonstrieren, die insbesondere aufzeigen sollen, wie authentische Prozesse durch die Aufgabenstellung angeregt werden können:

(a) Authentisches **Modellieren** bedeutet, alle Teilprozesse des Modellierens (Mathematisieren, Interpretieren, Validieren, Revidieren) – nicht notwendigerweise in jeder einzelnen Aufgabe, aber im Unterricht insgesamt – zu berücksichtigen.

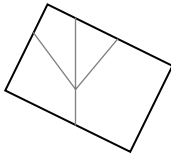
(b) Zum authentischen **Problemlösen** gehört es, dass Schülerinnen auch selbst Fragen oder Probleme finden und stellen, zu denen dann keine Lösung auf der Hand liegt. Solche Gelegenheiten findet man z. B. auch durch die Variation von einfachen Schulbuchaufgaben (SCHUPP 2002).

Schneide aus einem Quadrat vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus. Stelle auch eine andere Aufgabe.



(c) Ganz analog gehört zum authentischen **Argumentieren** auch das eigenständige Aufstellen von Vermutungen.

Falte ein DIN A4-Blatt einmal, zweimal oder dreimal. Finde dann möglichst viele Beziehungen zwischen den Winkeln



All diese Prozesse (wie auch das hier nicht näher beschriebene Begriffsbilden) lassen sich als „hermeneutische Spiralen“ zunehmender Erkenntnis beschreiben (s. Abb. zum Argumentieren). Aufgaben zum Leisten fokussieren eher auf bestimmte Teile, d. h. sie geben beispielsweise ein Problem, ein Modell bereits vor und fordern gezielt eine Interpretation oder eine Bearbeitung ein. Aufgaben zum Lernen hingegen zeichnen sich dadurch aus, dass sie viele Teilprozesse berücksichtigen und insbesondere die sehr offenen Prozesse der „ersten Phase“ (rechts oben in den Spiralen) berücksichtigen können.



Eine besondere Aufgabe von Lehrerinnen und Lehrern in Zeiten von Standardsetzungen besteht somit darin, als Leistungsaufgaben formulierte Anforderungen wieder in Lernaufgaben zu verwandeln:

„Wie mache ich den Gegenstand, der als Antwort auf eine Frage zustande kam, wieder zur Frage? Und umgekehrt: Wie erhalte ich das ursprüngliche Fragen des Kindes? [...] Alle methodische Kunst liegt darin beschlossen,

tote Sachverhalte in lebendige Handlungen rückzuverwandeln, aus denen sie entsprungen sind“ (ROTH 1957)

Das Arbeiten mit Aufgaben in der Lehreraus- und -weiterbildung kann nicht alle Zugänge zu Unterricht ersetzen, ist aber in folgendem Sinn als zentral zu erachten:

„Ich bin mir sicher, dass viele von Ihnen beim Lesen von Artikeln über Mathematikunterricht die Erfahrung gemacht haben, zunächst erstaunt zu sein, wie sehr doch die Herangehensweise den eigenen Ideen ähnelte, sobald jedoch konkrete Beispiele geschildert werden, werden die Unterschiede in den Auffassungen mehr als deutlich.“ (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2003).

2. Arbeiten mit Aufgaben zum Problemlösen in der ersten Phase der Lehramtsausbildung

Zur Beschreibung der in der Aus- und Fortbildung von Lehrerinnen und Lehrern zu entwickelnden Kompetenzen im Arbeiten mit Aufgaben auf der Grundlage u. a. auch der Überlegungen im ersten Abschnitt bietet sich eine nach Weinert 1999 verwendete Untergliederung in drei Zielkategorien an.

<u>Zielkategorien</u>	<u>Konkretisierung bzgl. Arbeiten mit Aufgaben</u>
<i>Intelligentes Wissen</i>	- <i>weiter Aufgabenbegriff (Aufgabe als Aufforderung zum Lernhandeln)</i> - <i>Kenntnisse über Aufgabentypisierungen</i>
<i>Handlungskompetenzen</i>	- <i>Aufgabenlösekompetenz</i> - <i>Fähigkeit zur Potenzial- und Funktionsanalyse von Aufgaben</i> - <i>Fähigkeit zur Aufgabenvariation und -konstruktion für Lernen und Leisten</i>
<i>Metakognitive Kompetenzen</i>	- <i>Reflektionskompetenz über die Potenzialausschöpfung von Aufgaben in Lehr-/Lernsituationen</i>

Alle genannten und sicherlich wünschenswerten Zielstellungen sind nur in einem Zusammenwirken von erster Ausbildungsphase, Referendariat und Lehrerfortbildung langfristig erreichbar.

Im Rahmen einer Grundlagenveranstaltung zur Einführung in die Fachdidaktik – an der TU Darmstadt heißt diese Veranstaltung „Situationen und Strategien beim Lehren und Lernen von Mathematik“ – sollten die Studierenden u. a. einen allgemeinen Aufgabenbegriff und verschiedene Typisierungen kennen lernen – z. B. nach dem Handlungsziel (vgl. auch BRUDER 2000), dem Schwierigkeitsgrad, dem Aktivierungspotenzial, den Formaten wie z. B. Multiple Choice und nach der didaktischen Funktion – von der Ausgangsniveausicherung über eine Stoffarbeit und Hausaufgaben bis hin zum Systematisieren und Testen. Nach dem Analyse- und Potenzi-

aspekt kann dann eine Synthese mit einer Einbindung bestimmter Aufgabentypen in didaktische Situationen folgen: Basiswissen lässt sich z. B. sichern mit Aufgaben, die verstandene Grundlagen einfordern – z. B. in einem „Lernprotokoll“ (BRUDER 2001) mit den folgenden Frageformaten:

- *das Einstiegsbeispiel der Unterrichtsreihe soll beschrieben werden*
- *eine Grundaufgabe zu einem grundlegenden Begriff, Verfahren oder Zusammenhang und eine mögliche Umkehrung dazu sollen gelöst werden*
- *es ist jeweils ein Beispiel anzugeben, wo das jeweilige Verfahren oder der Zusammenhang angewendet werden können – und wo nicht!*
- *welche typischen Fehler im Umgang mit dem Begriff, Verfahren oder Zusammenhang können auftreten?*

Ein solches Lernprotokoll sollte nicht benotet, wohl aber sorgfältig ausgewertet werden, weil es eine Brücke zwischen Lernen und Leisten herstellt. Die Lernenden erhalten eine klare Vorstellung, was wichtig ist und von Ihnen erwartet wird und wo sie stehen – lange vor einem abschließenden Test.

Im Sommersemester 2003 wurde im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität Schule“ der DFG an der TU Darmstadt eine weiterführende Wahlpflichtveranstaltung zum Problemlösenlernen im Mathematikunterricht entwickelt, realisiert und evaluiert, vgl. auch KOMOREK/BRUDER/SCHMITZ 2004. Hier wurde der natürlich auch für das Problemlösenlernen essentielle Aufgabenaspekt integriert – mit folgenden Gliederungspunkten:

1. Was soll unter Problemlösenlernen im MU verstanden werden?
2. Welche Konzepte mit welchen unterrichtlichen Konsequenzen und evaluierten Ergebnissen zum Problemlösenlernen gibt es?
3. Welche neuen/expliciten Lerninhalte sind wichtig?
4. Wie kann man Problemlösenlernen im MU allen Schüler/innen ermöglichen? (Konzeption aufgabenbasierter Lernumgebungen)
5. Was ist eine gute Problemlöseaufgabe zum Lernen oder/und zum Leisten?

Problemlösenlernen lässt sich definieren als das Kennen- und Anwendenlernen von Methoden zum Lösen individuell schwieriger Aufgaben. Ohne hier auf die verschiedenen Hintergrundtheorien zum Problemlösenlernen näher eingehen zu können, soll nur ein pragmatischer Extrakt vorgestellt werden, der eine lernförderliche unterrichtliche Einbettung von (potenziellen) Problemaufgaben verdeutlicht:

Vorgelebt durch die Lehrerin/den Lehrer werden die Lernenden angeleitet, sich vor der Bearbeitung einer schwierigen Aufgabe jeweils für sich folgende drei Fragen zu stellen und die Antworten (ggf. in einem Lerntagebuch) festzuhalten:

- Worum geht es?
- Was weiß ich schon im Zusammenhang mit dem Problem?
- Welche Methoden und Techniken stehen mir zur Verfügung?

Nachdem versucht wurde die Aufgabe zu lösen – möglichst zunächst allein, dann im Austausch mit dem Lernpartner und anschließendem Vergleich in einer Gruppe oder im Klassenverband – und Resultate sowie (unterschiedliche) Lösungswege vorliegen, geht es darum explizit herauszuarbeiten, worin der Lernzuwachs dieser Aufgabe besteht:

- Welche Mathematik hat uns geholfen die Aufgabe zu lösen?
- Welche Strategien waren nützlich?

Damit soll unterstrichen werden, dass das in einer Aufgabe angelegte Lernpotenzial im Unterricht nicht automatisch zum Tragen kommt, sondern noch einer methodischen Explizierung bedarf. Allein mit einem „Abarbeiten“ von Aufgabenplantagen aus standardisierten Tests oder Schulbüchern wird der potenziell mögliche Erkenntniszuwachs bei den Lernenden nicht erreicht werden können.

Offene Aufgaben – insbesondere mehrschrittige, bei der wie eine Blüte aus einer elementaren geschlossenen Teilaufgabe weitere Teilaufgaben mit offenem Ende herauswachsen, sind durch ihre Selbstdifferenzierung für Übungsprozesse sehr gut geeignet und bieten sich ebenso – nur mit einer gewissen Einschränkung der Ergebnisoffenheit – für standardisierte Tests an. Ergebnisoffene, kreative und mit kommunikativen Elementen versehene Fragestellungen, die so nicht in einem Test vorkommen werden, sind aber gerade ein wesentliches Element, mit dem die Schülerinnen und Schüler lernen können, sich so flexibel in einem Themenfeld zu bewegen, dass sie dann in Testsituationen entsprechend unblockiert agieren können.

Aber auch bestimmte geschlossene Aufgaben können z. B. als Musteraufgaben zum Erlernen einer heuristischen Strategie eine herausragende Bedeutung für das Lernen besitzen, um lediglich mit Kontextveränderungen wiederum zum Leisten geeignet zu sein:

„7-Tore-Aufgabe“

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele hatte er am Anfang?

Mit Hilfe dieser Aufgabe kann man die heuristische Strategie „Rückwärtsarbeiten“ besonders gut verdeutlichen. Beispiele zu weiteren Heuristiken enthält die Aufgabendatenbank www.madaba.de. Die Schüler nehmen solche Musteraufgaben gerne als Eselsbrücke für ähnliche Situationen. Doch

das genügt noch nicht. In die Lernumgebung zum Problemlösenlernen sollten auch wieder Elemente hinzu kommen, die man nicht unbedingt in einen Test aufnehmen würde, z. B. eine Aufforderung, sich Situationen im Alltag vorzustellen, bei denen man auch rückwärts denkt oder arbeitet (Schlüssel suchen, von einem neuen Ort wieder nach Hause finden u. ä.). Solche Aufgabenstellungen sind von zentraler Bedeutung dafür, dass die Lernenden mehr Sinn und Bedeutungszusammenhänge erfassen zwischen dem, was sie in ihrem Leben betrifft und dem, was im Mathematikunterricht gelernt werden soll.

Literatur

- BARZEL, Bärbel, HUßMANN, Stephan & LEUDERS, Timo (2004). Bildungsstandards und Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen und Baden-Württemberg - zwei Wege zur Umsetzung nationaler Empfehlungen. MNU, 57 (3).
- BRUDER, Regina (2001). Mathematik lernen und behalten. In: Heymann, H.-W. (Hrsg.): Lernergebnisse sichern. PÄDAGOGIK 53 (2001), Heft 10, S. 15 -18
- BRUDER, Regina (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In: HERGET/FLADE: Berlin, S. 69.
- JAHNKE, Thomas (2005) Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim/Berlin: Franzbecker. In Druck.
- KMK (2003). Vereinbarung über Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) - Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003.
- KOMOREK, Evelyn, BRUDER, Regina, SCHMITZ, Bernhard (2004). Integration evaluierter Trainingskonzepte für Problemlösen und Selbstregulation in den Mathematikunterricht. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Schulische und außerschulische Ansätze zur Verbesserung der Bildungsqualität*. Münster: Waxmann, S.54-76
- LEUDERS, Timo (2001). Qualität im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.
- NEUBRAND, Johanna (2002). Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.
- NEUBRAND, M., KLIEME, E., LÜDTKE, O. & NEUBRAND, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. Unterrichtswissenschaft, 30, 100-119.
- PISA Konsortium (2001). PISA 2000. Leske & Budrich.
- ROTH, Heinrich (1957): Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. Schroedel
- SCHUPP, Hans (2002). Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (2003). Die Geschichte der „Realistic Mathematics Education“ anhand von Aufgaben erläutert. In Silke RUWISCH & Andrea PETER-KOOP (Hrsg.), Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule (S. 25-39). Offenburg: Mildenerger.
- WEINERT, F.E. (1999): Die fünf Irrtümer der Schulreformer. Welche Lehrer/innen, welchen Unterricht braucht das Land? In: Psychologie heute, 26 (7), S. 28-34.