Reinhard OLDENBURG, Göttingen

Bidirektionale Verknüpfung von CAS und DGS – Analysen und Perspektiven

Zum Verhältnis von CAS und DGS

Algebra und Geometrie sind aufs engste vernetzte Teilgebiete der Mathematik. Allerdings bieten sich für den Mathematikunterricht unterschiedliche neue Medien an: Für die Algebra gibt es die Computeralgebrasysteme (CAS), für die Geometrie die dynamischen Geometriesysteme (DGS). (Cabri, Euklid, Cinderella...). Diese Situation könnte zu einer unerwünschten Entnetzung der Gebiete in den Vorstellungen der Schüler führen. Diese Befürchtung wird gestützt durch die breit akzeptierte These, dass das Operieren ein wesentlicher Schritt in der Begriffsbildung ist (z.B. Sfard 1991). Wenn nun aber DGS und CAS ganz unterschiedliche Operationsmöglichkeiten (beispielsweise beim Umgang mit Parabeln) schaffen, wird das Einfluss auf die Schülerkonstrukte haben.

Eine kurze Geschichte der Verbindung von CAS u. DGS

Erste Überlegungen zur Verbindung von CAS und DGS findet man bei Schumann 1991. In der Folgezeit wurde der Wunsch immer häufiger thematisiert und auf der Tagung ICTMT5 in Klagenfurt 2001 gab es eine Sektion „Cooperation between DGS and CAS“. Parallel dazu haben die zunächst der synthetischen Geometrie entsprungen Programme immer mehr (nummerische) algebraische Fähigkeiten erlangt:

- Koordinatensystem, Messen, Termboxen
- Berechnete Punkte
- Funktionsgraphen (direkt oder als Ortslinie berechneter Punkte)
- Geraden, Kreise, Kegelschnitte über Gleichung erzeugen (Geogebra)

Von einer echten Integration von CAS in das DGS kann aber nicht die Rede sein. Beispielsweise ist es unmöglich, die algebraischen Gleichungen zwischen den Objekten vollständig einzusehen und mit den CAS-üblichen Mitteln zu bearbeiten. Umgekehrt ist es nicht möglich, algebraische Relationen zwischen Koordinaten einzugeben.

Diese Beschränkungen sind allerdings technisch schwer zu umgehen, da die traditionellen DGS eine funktionale Struktur besitzen.

Das Begriffspaar funktional-relational im Kontext der DGS

Geometrie per se verwendet eine relationale Sprache, es ist von Beziehungen zwischen geometrischen Objekten die Rede. Erst wenn ein bestimmtes Problem durch eine Konstruktion gelöst werden soll, wird eine funktionale Modellierung verwendet: Eine geometrische Konstruktion liefert zu bestimmten gegebenen Bestimmungsstücken ein oder mehrere neue Objekte als Funktion der alten.

Diese Idee der geometrischen Konstruktion wird in traditionellen DGS wie Euklid, Cabri oder Geogebra durch einen gerichteten Abhängigkeitsgraphen modelliert. Dieser bestimmt die Abhängigkeiten zwischen den Objekten. Objekte, die von keinen anderen abhängig sind, können beliebig mit der Maus bewegt werden. Der Abhängigkeitsgraph manifestiert sich also an der Benutzeroberfläche durch die Auszeichnung der Basisobjekte. Darüber hinaus führt er zu einigen Einschränkungen, beispielsweise beim Versuch ein Viereck aus vier Seiten fester gegebenen Länge zu konstruieren: Durch eine solche Setzung käme ein Zykel in den Graphen und das würde den Aktualisierungsalgorithmus lahm legen.

Vom Blickpunkt der Algebra entsprechen den geometrischen Relationen bestimmte Gleichungen zwischen den Koordinaten. Der Abhängigkeitsgraph einer Konstruktion gibt an, wie die Gleichungen sukzessive nach bestimmten Variablen aufzulösen und so in Funktionen zu verwandeln sind.

Bidirektionale Integration: ADGS

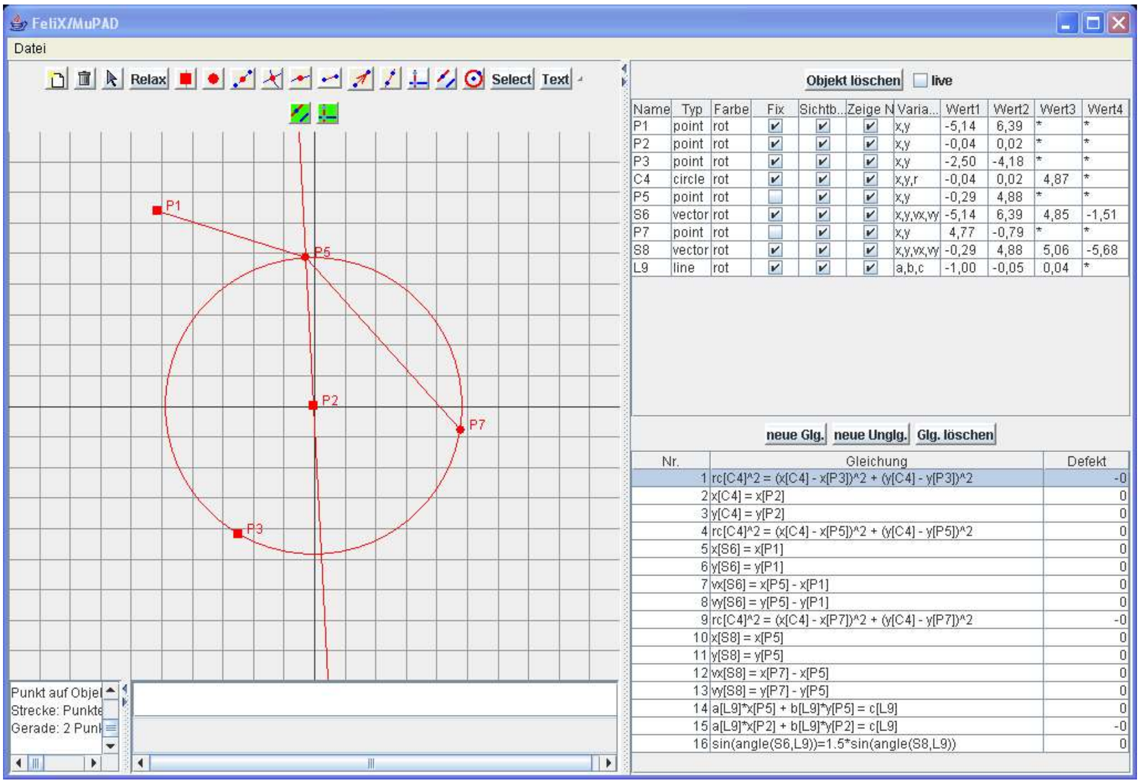
Eine echte Integration von dynamischer Geometrie und Computeralgebra soll den Namen **ADGS** (Algebraisches Dynamisches Geometrie-Programm) tragen. Definitionsgemäß soll ein ADGS folgendes leisten:

- Paralleles Arbeiten mit Algebrafenster und Geometriefenster, wechselseitig automatisch aktualisierend
- Volle CAS- und DGS-Funktionalität
- Bidirektionale Verknüpfung auf der Ebene der
    - Konfiguration/Koordinaten [Erzeugung/Modifikation]
    - Nutzer darf beliebige Koordinaten eingeben
- Relationen/Gleichungen
    - Nutzer darf beliebige Gleichungen eingeben

Diese letzte Forderung ist vom Standpunkt der Computeralgebra her ganz natürlich und wir werden zeigen, dass sie eine Reihe von neuen und interessanten Arbeitsweisen unterstützt. Sie erzwingt aber auch eine radikal andere Modellierung von Konstruktion und Zugmodus. Beispielsweise könnte der Benutzer Objekte durch Gleichungen verbinden, die im Abhängigkeitsgraphen zu Zykeln führen würden. Es muss deshalb eine andere mathematische Modellierung gefunden werden.

Die MuPAD-Version des ADGS FeliX

Bereits seit 2002 existiert ein in Mathematica eingebettetes ADGS: FeliX (Oldenburg 2003). Mit der Portierung nach MuPAD soll der Schritt aus dem Elfenbeinturm möglich werden.



FeliX für MuPAD präsentiert ein DGS-typisches Geometriefenster zusammen mit einer Objektliste und einer Liste der Gleichungen. Die beiden Listen können uneingeschränkt modifiziert werden und Änderungen wirken sich sofort auf die Konstruktion aus. Die gleiche bidirektionale Verbindung besteht auch mit einem MuPAD-Notebookfenster. Dort steht einem die gesamte CAS-Funktionalität von MuPAD zur Verfügung. Beispielsweise kann die MuPAD-Programmiersprache als Skriptsprache für FeliX-Konstruktionen verwendet werden.

Beispiele

Die folgende Aufzählung von Beispielen von Dingen, die man mit einem ADGS tun kann, soll die Nützlichkeit eines ADGS für den Mathematikunterricht illustrieren.

<u>Drachen</u>: Zur Erforschung des Begriffs „Drachen“ konstruiert man zunächst ein beliebiges Viereck mit Diagonalen und verlangt dann (durch Mausklick), dass die Diagonalen orthogonal sind. Durch Ziehen an allen vier Ecken kann man sich überzeugen, dass noch eine Bedingung fehlt. Diese kann durch eine Gleichung hinzugefügt werden.

<u>Ein Mittelpunkt im Viereck</u>: Zu einem beliebigen Viereck ABCD wird ein Punkt P mit den Gleichungen d(A,P)=d(C,P), d(B,P)=d(D,P) (d ist die Abstandsfunktion) hinzugefügt. Welche Eigenschaften ergeben sich?

Regenbogen: Der Verlauf der Lichtstrahlen in einem Regentropen (im Rahmen der Erklärung der Entstehung des Regenbogens) kann in einem DGS besonders einfach simuliert werden, weil das Brechungsgesetz direkt angewendet werden kann (siehe Bild).

Gelenkviereck: Die Modellierung in einem ADGS kann auf Hilfsobjekte wie Kreise verzichten. Die resultierende Konstruktion kann wie das Realmodell an allen Punkten angefasst und bewegt werden. Ähnliches gilt für ein Schubkurbelgetriebe: Anders als bei herkömmlichen DGS kann man an ein und derselben Konstruktion mal am Rad mal an der Stange schieben.

Gesetze mit (Un)gleichungen geben: Durch das Aufstellen von Gleichungen und Ungleichungen sollen einer Menge von Punkten Gesetze gegeben werden, beispielsweise dass sie sich nicht zu nahe kommen dürfen, oder in bestimmten Bereichen eingesperrt sind.

Didaktische Überlegungen

FeliX eröffnet neue Möglichkeiten für den Algebraunterricht. Es ist ein Werkzeug zum Modellieren mit Gleichungen und unterstützt verschiedene Grundvorstellungen von Variablen und Gleichungen.

Dagegen ist FeliX kein Werkzeug zum Erlernen von Zirkel-Lineal-Konstruktionen, da es viele traditionelle Konstruktionen trivialisiert.

Bei FeliX werden die Gleichungen der Konstruktion nicht nur angezeigt, sie dienen auch als Grundlagen für Berechungen im Zugmodus. FeliX bietet dem Nutzer damit den Zugriff aus alle Informationen, die das Verhalten der Konstruktion steuern. Dies kontrastiert mit herkömmlichen DGS, aber auch zB mit Tabellenkalkulationen, bei denen oft wichtige Bestimmungsstücke verborgen sind (DGS) oder unsichtbar als Formel in einer Zelle (TK) stehen. Tabellenkalkulationen könnten aber nicht nur in dieser Hinsicht vom FeliX-Konzept inspiriert werden, denn auch ihre mathematische Modellierung ist funktional, so dass man die Grundidee einer Transformation hin zur relationalen Modellierung sich hier anwenden könnte. Ergebnis wäre eine TK, mit der sich Probleme auf neuartige Weise lösen ließen.

Literatur

Borovcnik, M., Kautschisch, H. [2002]: Technology in Mathematics Teaching. Wien.

Oldenburg, R. [2003]: Feli-X: Ein Prototyp zur Integration von CAS und DGS, in: Bender et al.: Lehr- und Lernprogramme für den MU, Hildesheim , 123-132

Schumann, H. [1991]: Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart.

Sfard, A. [1991]: On the dual nature of mathematical conceptions, *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.