

Bettina RÖSKEN, Universität Duisburg-Essen

Elementare Kombinatorik unter kognitionspsychologischem Fokus

Motivation und Einordnung

Wie kein anderes Gebiet der Mathematik ist die Kombinatorik mit Begriffen des Alltags durchdrungen, viele Fragestellungen zeichnen sich durch einen hohen Alltagsbezug aus. So hält Brualdi (1977) in dem Vorwort zu „Introductory Combinatorics“ fest, „it would be surprising indeed if a reader of this book had never solved a combinatorial problem“ (S. 1). Der dominierende Aspekt in der schulischen Behandlung dieser fachlichen Domäne liegt in der Erarbeitung enumerativer Fragestellungen, insbesondere der kombinatorischen Grundprobleme, aber auch in kombinatorischen Betrachtungen topologischen Ursprungs. Für einen fachlich motivierten Überblick sei auf Polya (1983), Matousek und Nešetřil (2002) und auf Jungnickel und Jacobs (2004) verwiesen, für eine fachdidaktische Übersicht mit der Betonung auf intuitiven Zugängen, Visualisierungen und impliziten Konzeptualisierungen siehe Fischbein und Gazit (1988), Martino und Maher (1999), Sriraman und English (2004) und Batanero, Navarro-Pelayo und Godino (1997).

Ziel dieser Arbeit ist es, die fachliche Domäne und die verbundenen Lern- und Lehrprozesse unter kognitionspsychologischen Aspekten zu betrachten und neu zu analysieren. Unter Einbeziehung kognitionspsychologischer Ergebnisse wird dargelegt, welcher Limitierung die Kapazität unseres Arbeitsgedächtnisses obliegt. Effektives Lernen gelingt nur bei effektiver Arbeitsspeichernutzung, insbesondere sind hier die Implikationen, welche die „Cognitive Load Theory“ (Sweller, 1988) liefert, von Bedeutung. Anhand von Beispielen wird dargelegt, wie auf dem Hintergrund dieser Theorie, durch geeignete Implementierungen, überflüssige kognitive Belastungen vermieden werden können.

Das aktuell in der Presse erneut diskutierte „Ziegenproblem“ zeigt beispielsweise auf, wie fehlleitenden intuitiven Vorstellungen mit geeigneten Visualisierungen begegnet werden kann. Kognitionspsychologen des Max-Planck-Institutes in Berlin haben eine entsprechende Visualisierung mit Schüler/innen getestet und konnten zeigen, dass sich bei geeigneter Darstellung des Problems die Zahl der richtigen Lösungen erhöht (Paulus, 2004).

Theoretische Referenzen

Die Kapazität unseres Arbeitsgedächtnisses ist begrenzt, das Fassungsvermögen für neue Informationen liegt bei sieben plus/minus zwei Einheiten. Entscheidend ist aber nicht allein die Anzahl der Informationen, sondern insbesondere auch die zwischen diesen bestehenden Interdependenzen (Anderson, 2001; Parkin 2000). Eine Belastungsreduktion ist über geeignete Visualisierungen oder das Bilden entsprechender Makros möglich. Eine Visualisierung erleichtert das Erkennen der Beziehungen, geeignete Makros ermöglichen eine Informationsreduktion auf überschaubare kleinere Einheiten (Baddeley, 1997; Cooper, 1997). Ein hohes relationales Geflecht der beteiligten Konstrukte ist kennzeichnend für viele mathematische Lerninhalte. Nehmen wir ein Beispiel aus der Linearen Algebra:

*Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\varphi: V \rightarrow V^{**}$ vermöge $\varphi(v) = v^{**}$ mit $v^{**}(f) = f(v)$ ein Isomorphismus von V auf V^{**} .*

Dieser Satz stellt auf Grund der Interdependenzen der beteiligten Konstrukte hohe Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis, insbesondere dann, wenn nicht ausreichende Makros in dieser Wissensdomäne vorhanden sind. Expertenwissen zeichnet sich durch reich- und beziehungshaltige Schemata und einen hohen Automatisierungslevel aus, salopp formuliert gilt: „Für den Mathematiker ist V^{**} nicht komplizierter als V^* bzw. V “. Ein geeignetes Makro, beispielsweise zum Begriff der Dualität, oder eine reichhaltige Visualisierung können hier das Verständnis erleichtern.

Mit der „Cognitive Load Theory (CLT)“ erfolgt eine Charakterisierung der kognitiven Belastung des Arbeitsgedächtnisses (Sweller, 1988, 1994).

Während des Lernprozesses beeinflussen unterschiedliche Belastungsparameter die Ressourcen des Arbeitsgedächtnisses. Einen Überblick hierzu gibt nebenstehende Abbildung. Bei gleichem Inhalt („Intrinsic Load“) und konstanter Verarbeitungskapazität erwerben

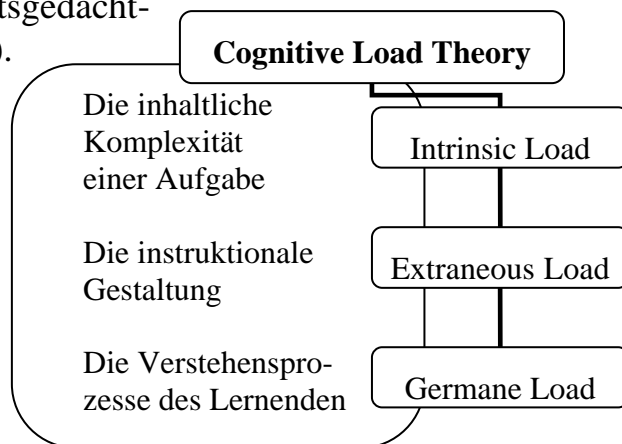


Abb. 1

Lernende mehr Wissen bei reduzierter „Extraneous“ und erhöhter „Germane Load“, d.h. bei zielgerichteten Verstehensaktivitäten. Als Ziele der CLT halten Paas, Renkl und Sweller (2004) fest: „Cognitive load theory is concerned with techniques for managing working memory load in order to facilitate the changes in long term me-

mory associated with schema construction and automation“ (S. 2). Die bisherige instruktionspsychologische Forschung zielte über die Gestaltung von Lernumgebungen auf die Reduktion der „Extraneous Load“. Neuere Forschung setzt an den komplexen Aufgaben selbst an, mit dem Ziel die „Intrinsic Load“ zu reduzieren. Das konventionelle Aufgabendesign in der Kombinatorik betont strukturelle Elemente, so dass rezeptartig kategorien-spezifische Lösungsformeln konsultiert werden können. Schwierigkeiten für Schüler/innen treten auf, weil sie i.d.R. nicht genügend Vorwissen besitzen, um mit der einhergehenden hohen kognitiven Belastung des Arbeitsgedächtnisses umgehen zu können. Eine geringere aufgabeninhärente kognitive Belastung ergibt sich nach Gerjets, Scheiter und Catrambone (2004) durch die Abkehr von der üblichen konventionellen molaren Struktur sogenannter „worked examples“. Wird beispielsweise in einer Textaufgabe nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Anzahl der k-Variationen aus n verschiedenen Elementen ohne Wiederholung gefragt, so ergibt sich folgende Differenzierung für die Beispielpräsentation:

An einem olympischen 100m Sprint nehmen 7 Sprinter teil. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Gold-, Silber und Bronzemedailengewinner hervorzusagen?	
<p>„Molar example format“ Identify task features: Permutation-without-replacement, order is important Apply formula Insert values Calculate probability</p>	<p>„Modular example format“ Find 1st event probability Find 2st event probability Find 3st event probability Find 4st event probability Calculate the overall probability</p>

In einer experimentellen Überprüfung konnten Gerjets et al. (2004) zeigen, dass das Lernen mit modularen Beispielaufgaben zu einer höheren Problemlösekompetenz sowohl für isomorphe als auch neue Probleme führt.

Reflexion und Ausblick

Die kognitionspsychologischen Ergebnisse legen es nahe, fachdidaktische Aspekte unter Beachtung einer neuronalen Dimension neu zu analysieren, nicht zuletzt um hier insbesondere auch der Mathematikdidaktik als einer „design science“ im Sinne Wittmanns (1992) gerecht zu werden. Als fruchtbar erweist sich, die Begriffsbildung in der Elementaren Kombinatorik unter kognitiven Aspekten zu betrachten. Welche Möglichkeiten gibt es im Unterricht, auf dem schwierigen Terrain der Kombinatorik, Begriffsbildung über Makros und Visualisierung zu schulen, um der Limitierung des Arbeitsgedächtnisses geeignet zu begegnen? Welche Möglichkeiten gibt es, im Unterricht Lösungsprozeduren zu modularisieren, um genügend kogni-

tive Kapazität für das Lernen durch Abstraktion und Elaboration zur Verfügung zu stellen. Gerade die Kombinatorik als Teilgebiet der Diskreten Mathematik bietet, nicht nur über probabilistische Einkleidungen, vielfältige Möglichkeiten sinnvolle Begriffsmakros und Visualisierungen, jenseits der Konzentration auf die kombinatorischen Grundbegriffe, zu nutzen.

Literatur

- Anderson, J.R. (2001). *Kognitive Psychologie* (3. Aufl.). Heidelberg, Berlin: Spektrum.
- Baddeley, A. (1997). *Human Memory. Theory and Practice*. Hove: Psychology Press.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., Godino, J. D. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, S. 181-199.
- Brualdi, R.A. (1999). *Introductory Combinatorics* (3rd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- Cooper, G. (1998). *Research into Cognitive Load Theory and Instructional Design at UNSW*. Available: http://education.arts.unsw.edu.au/CLT_NET_Aug_97.HTML [23.03.2005].
- Fischbein, E., Gazit, A. (1988). The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, S. 193-198.
- Gerjets, P., Scheiter, K., Catrambone, R. (2004). Designing Instructional Examples to reduce Intrinsic Cognitive Load: Molar versus Modular Presentation of Solution Procedures. *Instructional Science*, 32, 33-58.
- Jacobs, K., Jungnickel, D. (2004). *Einführung in die Kombinatorik* (2.Aufl.). Berlin: de Gruyter.
- Matousek, J., Nešetřil, J. (2002). *Diskrete Mathematik. Eine Entdeckungsreise*. Berlin: Springer.
- Martino, A.M., Maher, C.A. (1999). Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice has taught us. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18 (1), 53-78.
- Paas, F., Renkl, A., Sweller, J. (2004). Cognitive load Theorie: Instructional Implications of the interaction between Information Structures and Cognitive Architecture. *Instructional Science*, 32, 1-8.
- Parkin, A.J. (2000). *Essential Cognitive Psychology*. Hove: Psychology Press.
- Polya, G., Tarjan, R.E., Woods D.R. (1983). *Notes on Introductory Combinatorics*. Stuttgart: Birkhäuser.
- Paulus, J. (2004). Das Rätsel der drei Türen. *Die Zeit*, 48. Verfügbar unter: <http://www.zeit.de/2004/48/N-Ziegenproblem?term=Ziegenproblem>[25.02.2005].
- Sriraman, B., English, L.D. (2004). Combinatorial Mathematics: Research into Practice. *Mathematics teacher*, 98, 3, 182-191.
- Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving. *Cognitive Science*, 12, 257-285.
- Sweller, J (1994). Cognitive load theory, learning difficulty and instructional design. *Learning and instruction*, 4, (4), 295-312.
- Wittmann, E. (1992). Mathematikdidaktik als „design science“. *JMD*, 13, 1, 55-70.