

Andreas FILLER, Heidelberg

Herausarbeiten funktionaler und dynamischer Aspekte von Parameterdarstellungen im Mathematikunterricht

Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen gehören zu den Standardinhalten des Stoffgebietes Lineare Algebra/ Analytische Geometrie in der Sekundarstufe II. In Rahmenplänen, Schulbüchern und im praktisch durchgeführten Unterricht folgen nach einer Einführung der Parameterdarstellungen meist sehr schnell Aufgaben zur Umformung von Parameter- in Koordinatenform und umgekehrt sowie zu Lagebeziehungen und Schnittpunktbestimmungen.¹ Zwei wichtige – miteinander verbundene – Aspekte der analytischen Geometrie, die anhand von Parameterdarstellungen gut verfolgt werden könnten, kommen dabei nicht in ausreichendem Maße zur Geltung:

- Die Schüler gelangen höchstens in Ansätzen zu einer *Auffassung geometrischer Objekte als Punktmengen*; dominierend bleibt die Auffassung von Geraden als konkret-gegenständlichen Objekten, deren Lage im Raum durch einen Punkt und einen Richtungsvektor festgelegt ist.²
- Der *funktionale Zusammenhang zwischen dem Parameter* (bzw. den Parametern) *und den zugehörigen Punkten* wird von Schülern meist nicht oder nur ansatzweise erkannt.³ Das Erkennen dieses Zusammenhangs setzt eine Sicht auf geometrische Objekte als Punktmengen voraus, geht aber darüber noch insofern hinaus, als die Abhängigkeit der Lage von Punkten im Raum von dem Parameter/ den Parametern erfasst wird.

Im Folgenden werden Möglichkeiten skizziert, unter Nutzung geeigneter Software den Punktmengencharakter sowie funktionale und dynamische Aspekte bei der Behandlung von Parameterdarstellungen hervortreten zu lassen.

Als erster Schritt, um den Punktmengengedanken bei der Einführung von Parameterdarstellungen zu betonen (und damit die Grundvoraussetzung für

¹Die Dominanz des Abarbeitens bestimmter Aufgabentypen im Mathematikunterricht wurde – auch bezogen auf das Stoffgebiet Analytische Geometrie – bereits häufig beklagt, siehe u. a. [1], [9] und [10].

²Siehe z. B. [10], S. 140ff. und [12], S. 377ff..

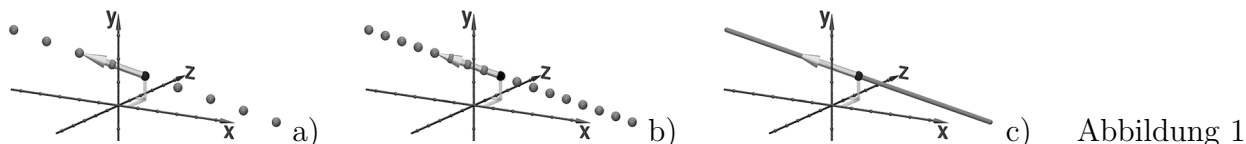
³Funktionales Denken bzw. das Erfassen funktionaler Zusammenhänge kennzeichnete VOLLRATH in [11] durch drei grundlegende Aspekte: Zuordnungscharakter, Änderungsverhalten, Sicht auf Funktionen als Ganzes. Die ersten beiden Aspekte kommen bei der Behandlung von Parameterdarstellungen selten zum Tragen, auch die erreichte ganzheitliche Sicht kann nur als „manipulativ“ (siehe [8]) angesehen werden.

funktionale Überlegungen in diesem Themenbereich zu schaffen), bietet es sich an, dass die Schüler Geraden punktweise konstruieren, wozu z. B. eine Aufgabe folgender Art gestellt werden kann:

Gegeben sind der Punkt $P(0,5; 1; 1,5)$ und der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$. Stellen Sie

P als Punkt und \vec{a} als in P beginnenden Pfeil dar. Fügen Sie Ihrer Darstellung die Punkte $P-2\cdot\vec{a}$, $P-1,5\cdot\vec{a}$, $P-\vec{a}$, $P-0,5\cdot\vec{a}$, $P+0,5\cdot\vec{a}$, $P+\vec{a}$, $P+1,5\cdot\vec{a}$ und $P+2\cdot\vec{a}$ hinzu. Betrachten Sie die Darstellung aus verschiedenen Richtungen.

Eine Lösung dieser Aufgabe zeigt Abb. 1 a).⁴ Daran wird spätestens nach Betrachtung aus verschiedenen Richtungen deutlich, dass alle (durch kleine Kugeln dargestellten) „Punkte“ auf einer Geraden liegen. Nach der Darstellung einer größeren Zahl von Punkten durch die Verkleinerung der Parameterabstände (Abb. 1b) dürfte für Schüler auch plausibel werden, dass sich umgekehrt alle Punkte der durch P verlaufenden Geraden, deren Richtung durch \vec{a} gegeben ist, in der Form $P+t\cdot\vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen lassen. Steht Zeit zur Verfügung, um einfache Schleifen oder Prozeduren zu behandeln (siehe z. B. [6]), so kann durch die Darstellung sehr vieler Punkte, die allmählich zu einer Strecke „verschmelzen“ (Abb. 1c), noch anschaulicher werden, dass die durch $\{X = P+t\vec{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$ beschriebene Punktmenge eine Gerade ist.



Es ist zu befürchten, dass der Punktmengengedanke im Zusammenhang mit Parameterdarstellungen bei Schülern schnell „verblasst“, wenn nach einer Einführung in der oben beschriebenen Weise sofort zur Bearbeitung der üblichen Standardaufgaben übergegangen wird. Zudem dürfte die Betrachtung linearer Objekte nicht ausreichen, um die Tragweite der Beschreibung geometrischer Objekte durch Parameterdarstellungen und die dabei auftretenden funktionalen Zusammenhänge und dynamischen Aspekte zu erfassen. Die

⁴Es wurde hierfür das skriptgesteuerte 3D-Grafikprogramm POV-Ray genutzt. Diese kostenlose Software kann an verschiedenen Stellen im Stoffgebiet Analytische Geometrie verwendet werden; entsprechende Vorschläge finden sich u. a. in [2], [3] und [4]. Beispiele und (für Schüler verfasste) Anleitungen zum Einsatz von POV-Ray im Unterricht der analytischen Geometrie enthält die Internetseite [7]. Alternativ zu POV-Ray ist auch die Verwendung eines Computeralgebrasystems (CAS) wie MuPAD möglich. Für Geraden in der Ebene oder ebene Kurven lassen sich entsprechende grafische Darstellungen natürlich auch manuell anfertigen.

Behandlung von Kurven und evtl. auch Flächen ist aus diesem Grunde nicht nur sinnvoll, um die häufig kritisierte Formenarmut des Unterrichts in analytischer Geometrie (siehe z. B. [9]) zu überwinden, sondern bildet auch eine wichtige Bedingung dafür, dass Schüler die Idee des funktionalen Zusammenhangs bei der Arbeit mit Parameterdarstellungen tiefer gehend erfassen. Dafür sprechen vor allem folgende Gründe:

- Bei nichtlinearen Objekten liegen ganzheitliche Vorstellungen weniger nahe als bei Geraden; so existiert z. B. kein einzelner Vektor, der (wie ein Richtungsvektor einer Geraden) den Verlauf einer Kurve beschreibt.
- Durch die Betrachtung „neuer“ Objekte ergeben sich Anlässe, geometrische Objekte und algebraische Beschreibungen miteinander zu vergleichen. Die Gefahr, dass sich eingeschränkte Vorstellungen von Parameterdarstellungen verhärteten, die vor allem an der Abarbeitung von Kalkülen orientiert sind, wird dadurch verringert.

Als Ausgangspunkt für die Behandlung von Kurven bieten sich u. a. Kreise an. Deren Parameterdarstellungen können anknüpfend an den MU der SI (trigonometrische Funktionen am Einheitskreis) erarbeitet und durch funktionale Überlegungen variiert werden, wodurch sich z. B. Parameterdarstellungen von Spiralen und Schraubenlinien ergeben (siehe hierzu [5] und [6]).

Für die *Herausbildung einer dynamischen Sicht auf Parameterdarstellungen* eignet sich insbesondere die *Erstellung von Animationen* (Videos) in einer geeigneten Grafiksoftware oder einem Computeralgebrasystem (CAS). Hierzu sind Positionen von Objekten oder die Position des Beobachters (bzw. der Kamera) in Abhängigkeit von einem Zeitparameter zu beschreiben. Die Betrachtung von Geraden bzw. Kurven als Punktmengen und dynamische Aspekte lassen sich dabei gut miteinander kombinieren.⁵

Die Erzeugung von Animationen auf der Grundlage von Parameterdarstellungen ist mit dem bereits erwähnten 3D-Grafikprogramm POV-Ray oder mit einem CAS wie Maple oder MuPAD möglich. Beispiele für die Beschreibung und Darstellung von Kurven und ihre Nutzung als Bewegungsbahnen in Animationen finden sich u. a. in [5] und [6] sowie auf der Internetseite [7].

⁵Ein weiteres wichtiges Argument für die Anfertigung von Animationen zur Erlangung einer dynamischen Sicht auf Parameterdarstellungen besteht darin, dass sich Schüler erfahrungsgemäß für die Generierung von Videos in überdurchschnittlich hohem Maße interessieren.

Literatur

- [1] Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.W., Weigand, H.G.: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: JMD 22 (1), S. 73-90 (2001)
- [2] Filler, A.: Dreidimensionale Computergrafik und Analytische Geometrie. In: Mathematica Didactica 24 (2), S. 21-56 (2001)
- [3] Filler, A., Wittmann, G.: Raumgeometrie vom ersten Tag an! Einstiege in die Analytische Geometrie. In: MU 50 (1), S. 90-103 (2004)
- [4] Filler, A.: Didaktische Aspekte der Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in das Stoffgebiet Analytische Geometrie. In: Proceedings. Bericht über die 21. Arbeitstagung des Arbeitskreises MU und Informatik in der GDM. Franzbecker, Hildesheim, S. 81-94 (2005)
- [5] Filler, A.: Schüler erstellen Videos durch Parameterbeschreibungen und zeitabhängige Transformationen. In: Istron. Materialien für einen realitätsbezogenen MU, Band 9. Franzbecker, Hildesheim, S. 57-66 (2006)
- [6] Filler, A.: Dynamische Aspekte von Parameterdarstellungen: Generieren von Bewegungsbahnen sowie von Geraden und Kurven als Punktmengen. Erscheint in: Proceedings. Bericht über die 23. Arbeitstagung des AK MU und Informatik in der GDM. Franzbecker, Hildesheim, 2007
- [7] Filler, A.: 3D-Computergrafik und die Mathematik dahinter. <http://www.afiller.de/3dcdg> (letzte Aktualisierung: 13.04.2007)
- [8] vom Hofe, R.: Über den manipulierenden und reflektierenden Umgang mit Funktionen. In: MU 50 (6), S. 47-56 (2004)
- [9] Schupp, H.: Geometrie in der Sekundarstufe II. In: JMD 21 (1), S. 50-60 (2000)
- [10] Tietze, U.P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Vieweg, Braunschweig 2000
- [11] Vollrath, H. J.: Funktionales Denken. In: JMD 10 (1), S. 3-37 (1989)
- [12] Wittmann, G.: Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Franzbecker, Hildesheim 2003