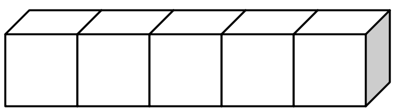
Tatjana BERLIN, Essen

Unterrichtsvorschlag zur Einführung von Variablen im 5. Schuljahr

Im traditionellen Algebraunterricht beginnt die Einführung der symbolischen Algebra in der Jahrgangsstufe 7. Die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der algebraischen Formelsprache sind seit Jahren bekannt. Die Autorin ist der Auffassung, dass man die ersten Begegnungen mit Algebra in frühere Jahrgangsstufen verlagern kann und soll, damit die Lernenden die Gelegenheit bekommen, sich an eine neue Symboldarstellung zu gewöhnen und sich vom Nutzen der Symbolisierung zu überzeugen. Mit Aktivitäten wie Erkennen von Mustern und Beziehungen in arithmetischen oder geometrischen Lernumgebungen, Beschreiben der Strukturen durch konkrete Zahlenbeispiele und dann allgemein mit Hilfe von Symbolen können die Grundlagen gelegt werden, die den Schülerinnen und Schülern helfen können, den Weg zur Algebra zu bahnen. Dabei sollte man die Lernenden die ersten Schritte im Gebrauch der Formelsprache zunächst auf „verschiedenen individuellen Erkenntniswegen" (Hefendehl-Hebeker 2003, S.27) gehen lassen und Metakognition (vgl. Berlin 2008) bei der Auseinandersetzung mit den Aufgaben initiieren.

In diesem Aufsatz wird geschildert, wie Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 5 in einer gegenständlich repräsentierten geometrischen Lernumgebung das Bildungsgesetz einer Folge erfassen und dieses mit Hilfe der Variablen *n* für eine beliebige natürliche Zahl allgemein darstellen. Es handelt sich hierbei um die Aufgabe „Würfelschlange" (vgl. Affolter et al. 2003, S. 23), die den Kindern in Einzelninterviews im Rahmen des Dissertationsprojektes angeboten wurde.

Aufgabenstellung



Auf dem Tisch liegen Holzwürfel gleicher Größe. Zuerst soll die Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem einzelnen Würfel bestimmt werden. Weil eine Seite des Würfels verdeckt wird, wenn dieser auf dem Tisch liegt, bleiben von den ursprünglichen sechs sichtbaren quadratischen Seiten nur noch fünf übrig. Ferner werden Würfelschlangen gebildet, indem man einen bereits auf dem Tisch liegenden Würfel nach und nach durch Heranschieben weiterer Würfel zu einer Würfelschlange ansteigender Länge ergänzt. Mit jedem Würfel soll die Anzahl der nun sichtbaren Quadrate notiert und der Anzahl von Würfeln in der Schlange gegenübergestellt werden. Dabei zeigen sich Gesetzmäßigkeiten, welche eine allgemeine Darstellung fordern.

Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler im Überblick

Im Laufe der Auseinandersetzung mit der Aufgabe entwickeln die Kinder verschiedene Abzählstrategien. Neben den Rechnungen stellen sie arithmetische Terme als Kurzprotokolle von Rechenstrategien auf und geben mit Hilfe einer Formel an, wie die Anzahl der sichtbaren Quadrate mit der Anzahl n der Würfel zusammenhängt. Die unterschiedlichen Strukturierungen spiegeln sich in den von den Kindern aufgestellten Zahlentermen und Formeln wider. Typische Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler lassen sich gut an den folgenden Lösungen von einigen Fünftklässlern aufzeigen:

- Verena zählt nacheinander die Quadrate an der Vorderseite, der Oberseite und der Rückseite und berücksichtigt anschließend die beiden Quadrate an den Enden der Würfelschlange. Sie gelangt zu dem Term $n+n+n+2$.
- Kevin zählt die drei Reihen gebündelt und fügt dann die beiden Quadrate an den Enden hinzu. Er kommt auf den Term $n \cdot 3+2$.
- Lena betrachtet im Gegensatz zu Verena und Kevin die Quadrate pro Würfel und zählt das obere, vordere und hintere Quadrat eines Würfels und dann die beiden Quadrate an den Enden. Ihre Vorgehensweise verallgemeinert sie durch den Term $3 \cdot n+2$.
- Michael betrachtet ebenfalls die sichtbaren Quadrate eines Würfels, unterscheidet jedoch zwischen den beiden äußeren Würfeln und der sich ändernden Anzahl der inneren Würfel. Er konstruiert den Term $4+(n-2) \cdot 3+4$.
- Niko erkennt die Veränderung und prüft die mit jedem neuen Würfel hinzukommende Anzahl der sichtbaren Quadrate. Schon nach drei Würfeln verkündet er eine Gesetzmäßigkeit gesehen zu haben und notiert den Term $5+3 \cdot (n-1)$.
- Nina überlegt sich: Jeder Würfel hat, wenn er allein auf dem Tisch liegt, 5 sichtbare Quadrate. Werden zwei Würfel zusammen geschoben, decken sich zwei vorher sichtbare Quadrate an den Enden gegenseitig zu. Werden n Würfel zusammen geschoben, entstehen n–1 Nachtstellen dieser Art. So kommt die Schülerin auf den Term $5 \cdot n-(n-1) \cdot 2$.

Von den unterschiedlichen Lösungsansätzen der Schülerinnen und Schüler ausgehend, kann man im Unterricht auf natürliche Weise zum Aspekt der Äquivalenz der algebraischen Terme durch Termumformungen gelangen. Man kann durch konkrete Zahlenbeispiele und auch auf formaler Ebene die Gleichwertigkeit dieser Formeln zeigen.

Symbolsprache der Algebra als Mittel der Argumentation

Es ist von besonderem Interesse zu beobachten, wie die Interviewfrage nach zehn Würfeln bearbeitet wurde, unmittelbar nachdem die Kinder ihre Formeln mit Hilfe der Variablen n für eine beliebige natürliche Zahl allgemein aufstellten. Während einige Kinder die auf dem Tisch liegenden Würfel zusammen schoben und abzählten, führten die anderen ihre Zählstrategien fort bzw. benutzten die selbst entwickelten algebraischen Darstellungen, indem sie die Zahl zehn statt der Variable n in die Formel einsetzten und zu der richtigen Lösung 32 kamen. Viele Kinder behaupteten jedoch zunächst, dass bei der Verdoppelung der Anzahl an Würfeln die Anzahl der sichtbaren Quadrate sich auch verdoppeln würde, und schlossen von 17 sichtbaren Quadraten bei fünf Würfeln auf 34 sichtbare Quadrate bei zehn Würfeln. Die nachfolgende Szene stammt aus einem Interview mit Niko:

59	I	Wie viele Quadrate werden bei zehn Würfeln sichtbar?
60	N	Zehn … Da werden vierunddreißig
61	I	Wie hast du gerechnet?
62	N	Siebzehn plus siebzehn. Bei fünf sind es siebzehn, und zehn ist doppelt so groß als fünf.
63	I	Bilde die Schlange und rechne nach.
64	N	*(bildet eine Schlange aus 10 Würfeln)* Eins, zwei, ah! Dreißig, einunddreißig, zweiunddreißig… Und 17 plus 17 …
65	I	Vierunddreißig.
66	N	Stimmt nicht!
67	I	Was stimmt nicht?
68	N	Gerechnet habe ich richtig.
69	I	Wie viele Quadrate sehen wir?
70	N	Zweiunddreißig.
71	I	Zweiunddreißig, das ist die Tatsache.
72	N	Nun, wir können mit diesem Schema versuchen (*zeigt auf den Term $5+3\cdot(n-1)$, schreibt einen Zahlenterm $5+3\cdot(10-1)$ auf und rechnet den Wert aus).* Alles richtig, 32.
73	I	Und was war dort mit 17?
74	N	Ich ahne etwas, aber verstehe nicht was es ist.
75	I	Lass uns überlegen, was wir machten. Das sind Würfel vor dir, schau die an!
76	N	Nun, wo hatten wir 17? *(Trennt die Schlange in zwei Schlangen je fünf Würfel).* Ah! *(strahlt)*
77	I	Hast du es?

78	N	Aha!
79	I	Sag es mir.
80	N	Ich kann sogar zeigen (*schiebt beide kurze Schlangen aneinander und wieder auseinander*). Hier waren 17 und hier 17. Und diese zwei Quadrate verschwanden.

Diese Äußerungsfolge zeigt, wie stark der Schüler von seiner Abzählstrategie überzeugt ist und seiner selbst konstruierten Formel vertraut. Somit wird die symbolische Darstellung als Argumentationsmittel verwendet.

Potenzial der Aufgabe

Die präsentierte Aufgabe zur Bildung von Würfelschlangen ist gut für die Einführungsphase der algebraischen Formelsprache geeignet. Sie ist handlungsorientiert, da eine aktive, selbst gesteuerte Tätigkeit der Lernenden gefordert wird. Kinder lernen eigene Gedanken zu ordnen, eigene Lösungsansätze zu analysieren und daraus Erkenntnisse zu gewinnen. Dadurch wird Denken zum „Ordnen des Tuns“ (Aebli 1993/1994). Diese Aufgabe ist auch schülerorientiert, da sie zulässt, die vorhandene Entwicklungsstufe und die Individualität jedes Lernenden zu berücksichtigen. Die Kinder zeigen unterschiedliche Herangehensweisen bei der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe und strukturieren die Konfiguration der sichtbaren Quadrate der Würfelschlangen auf verschiedene Weisen, was zu einer Vielfalt an Beschreibungen führt. Die Gesamtheit der verschiedenen Sichtweisen und Formulierungen führt im Unterrichtsgespräch zu einem tiefgehenden Verständnis des Probleminhaltes und kommt somit allen Beteiligten zugute. Die Aufgabe ist auch fachorientiert, da die algebraische Formelsprache gleichzeitig zum Mittel des Selbstausdruckes und der Kommunikation wird. Dabei sind die Einblicke, die die Lehrerinnen und Lehrer in die Vorstellungen und individuellen Denkweisen ihrer Schülerinnen und Schüler gewinnen, von unschätzbarem Wert.

Literatur

Aebli, H. (1993/94). Denken: das Ordnen des Tuns. Band I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. Band II: Denkprozesse. 2. Auflage. Stuttgart: Klett-Cotta.

Affolter, W. u. a. (2003). mathbu.ch 7. Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: Schulverlag blmv AG und Zug: Klett und Balmer AG.

Berlin, T. (2008). Metakognition als Schlüssel zur Einführung der algebraischen Formelsprache. In Barzel, B., Berlin, T., Bertalan, D. & Fischer, A. (Hrsg.), *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 17 - 25). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Didaktik der Mathematik als Wissenschaft – Aufgaben, Chancen, Profile. Jahresbericht der DMV 105, Heft 1 (S. 3 – 29). Teubner.