

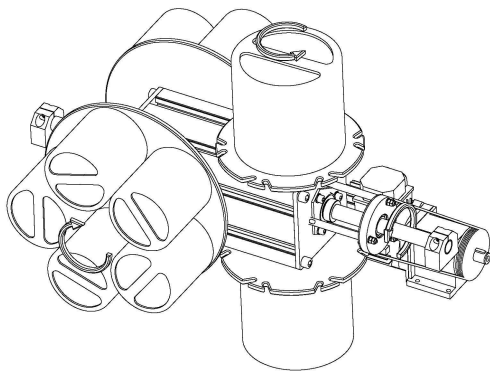
Gert KADUNZ, Klagenfurt

Diagramm und Algorithmus

In der mathematikdidaktischen Literatur findet sich seit mehreren Jahren – spätestens seit Hoffmann 2003 – ein theoretischer Ansatz zur Interpretation und Organisation des Lernens von Mathematik, der unter dem Stichwort Semiotik zusammengefasst werden kann. Beispielhaft sei auf Themenhefte der ESM (2006/Bd. 61) sowie des JMD (2006/Bd.27, Nr.3/4) verwiesen. In den folgenden Ausführungen konzentriere ich mich unter Bezug auf die Semiotik des Ch. S. Peirce auf die Verwendung von Diagrammen bei der Entwicklung eines elementaren Algorithmus zur Lösung einer geometrisch-kinematischen Fragestellung. Dabei wird an einem Beispiel die Interpretation von Diagrammen – vor allem in Gestalt von Skizzen – und deren schrittweise Übersetzung in eine algorithmische Beschreibung eines Sachverhaltes vorgestellt.

Die Fragestellung und eine mögliche Lösung

Ein Betrieb, der Maschinen zur Durchmischung von Pulvern herstellt, möchte das Verhalten einer speziellen Mischmaschine mit Mitteln der Mathematik beschreiben. Zu diesem Verhalten zählt auch die Bahnkurve des Mischbehälters bei Durchführung des Mischvorganges. Die hier angegebene Abbildung zeigt die CAD-Konstruktion eines Prototyps der Mischmaschine. Wir konzentrieren uns auf einen Mischbehälter und wollen seine Bahnkurve beschreiben. Dabei dreht sich der Behälter um zwei zueinander orthogonale Achsen (in der CAD-Konstruktion durch die kreisförmigen Pfeile angedeutet).

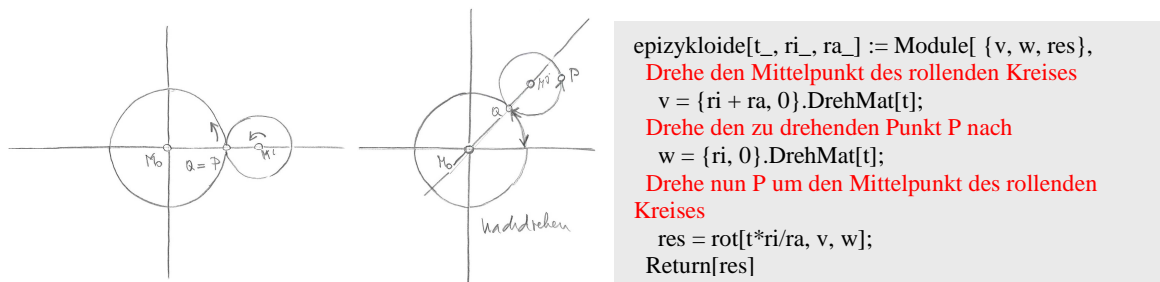


Der Weg zur vollständigen Beschreibung dieser Bahnkurve im Raum wird nun vorgestellt. Dabei soll der Lösungsweg möglichst einfach und mit den Mitteln der Schulmathematik begehbar sein. Die nachfolgende Lösung geht aber noch einen Schritt weiter. Die Lösung dieser Problemstellung gelingt im Wesentlichen

ohne „Rechnung“, da alle notwendigen „Rechnungen“ an ein CAS ausgelagert werden.

Bei der zu untersuchenden Bewegung handelt es sich offensichtlich um die Hintereinanderausführung zweier Drehungen. Da eine unmittelbare Beschreibung in Gestalt einer Parameterdarstellung nicht möglich erscheint,

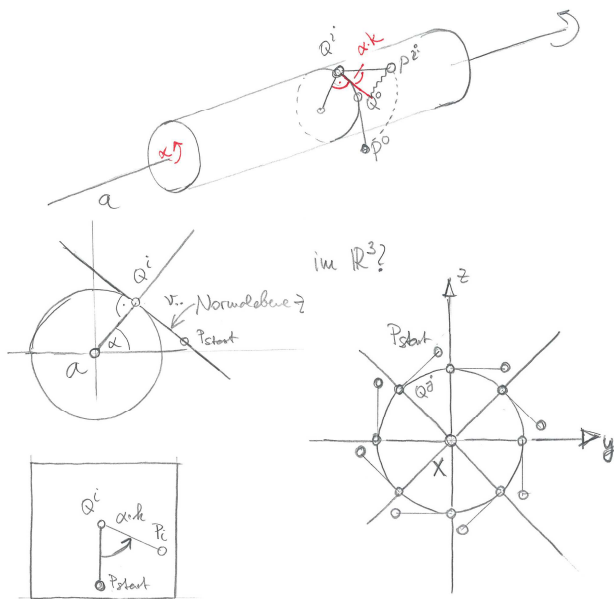
hilft die heuristische Strategie Polyas, eine verwandte Aufgabe zu suchen. Die Verknüpfung zweier Drehungen, wenngleich in der Ebene, ist nun eine altbekannte Geschichte, welche den Namen Epizykloidenbewegung trägt. Können wir die Kenntnisse dieser Bewegung verwenden, um den Computer per Algorithmus zu überreden, die Epizykloide für uns zu zeichnen und vor allem auch deren Bahnkurve in Form einer Parameterdarstellung für uns zu bestimmen. Zwei Diagramme, welche die Rollung darstellen, stehen am Beginn der Lösung. Mit ihrer Hilfe kann die Entstehung der Bahnkurve mit Worten beschrieben werden. Dabei ist nur zu beachten, dass die Rollung für eine Position des zu drehenden Punktes formuliert wird. Es entsteht eine in Zeilen organisierte Beschreibung. Diese Beschreibung kann dann unmittelbar in die Sprache des CAS (hier Mathematica 7.0) übersetzt werden. Die hier angegebenen Abbildungen und der Beschreibungsalgorithmus mögen dies verdeutlichen.



Der Gewinn, der aus diesem Vorgang erzielt werden kann, ist nun weniger die Zeichnung der Bahnkurven, als vielmehr die Ausgabe der Parameterdarstellung der Epizykloide ohne Rückgriff auf Analysis und Lineare Algebra. Dies leistet das CAS. Auf eine Darstellung der Parameterdarstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

Blickt man auf diesen ersten Ansatz, so sind einander abfolgende Handlungen zu erkennen. Dies ist zuerst die Anfertigung einer händischen Zeichnung, welche den Regeln der Geometrie folgt (Diagramm der Geometrie). Danach erfolgt die Übertragung in eine noch umgangssprachliche Beschreibung der Bewegung, welche aber schon algorithmische Züge trägt. Zuletzt wird diese Beschreibung in einen linearen Algorithmus übersetzt. Diese Vorgangsweise soll nun auf die eigentliche Fragestellung angewandt werden. Leider erweist sich dies als aufwendiger als zuerst gedacht. Zwar kann die Darstellung der räumlichen Bewegung eines Punktes der Mischmaschine auch in einer Freihandskizze gelingen, eine sorgfältige algorithmische Beschreibung scheint aber auf den ersten Blick nicht möglich. Ein anderer Vorschlag Polyas eröffnet einen neuen Blick. Kann die Fragestellung zweidimensional gedeutet werden?

Die hier angegebene Abbildung zeigt vier Konstruktionen. Zuerst ist eine räumliche Skizze erkennbar, welche die gesuchte Bahnkurve andeutet. Die



Drehachse eines Zylinders sei a . Ein Punkt Q dreht sich um a und steuert eine Stange fester Länge. Deren Endpunkt sei der Punkt P . Diese Stange schließt mit der Radiusrichtung von Q jeweils einen rechten Winkel ein. Der Punkt P dieser Kurve wird für zwei Positionen gezeichnet. Dazwischen verläuft die vermutete Kurve. Aus dieser Darstellung ist eine algorithmische Beschreibung schwer abzulesen. Folgt man aber Polyas zweitem Vorschlag,

so ergeben sich neue Beschreibungsmöglichkeiten. Blickt man in Richtung der Drehachse a , so kann die Fragestellung „zweidimensional“ gedeutet werden. Ein Punkt Q bewegt sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Drehachse a entspricht. Er steuert über eine Strecke fester Länge den Bahnkurvenpunkt P . Diese Strecke schließt nun mit der Richtung des zum „Mittelpunkt“ einen rechten Winkel ein. In jedem Augenblick wird Q gedreht und gleichzeitig dreht sich auch P . Für acht Positionen stellt die letzte

```

kurve[t1_,t2_,q_,radInnen_,radAussen_]:=Module[
{gedrehteMitte, kurvenPunkt,Mr,p,vek,normalvek,vek2},
Nimm den Drehungsmittelpunkt der äußeren Drehung
Mr={0,radInnen,0};
Drehe Mr um die x-Achse
gedrehteMitte=drehungsraum[t1,q].Mr;
Zwischenrechnung
vek2=1/Norm[gedrehteMitte]*gedrehteMitte;
vek={gedrehteMitte[[2]],gedrehteMitte[[3]]};
normalvek={gedrehteMitte[[3]],-gedrehteMitte[[2]]};
Trage in Richtung des gewählten Normalvektors den Außenradius auf
p=vek+(radAussen/Norm[normalvek])*normalvek;
Drehe nun p um den Drehungsmittelpunkt der äußeren Drehung
kurvenPunkt=drehungsraum[t2,vek2].{0,p[[1]],p[[2]]};
N[kurvenPunkt]

```

dieser händischen Zeichnungen diese Drehung von Q dar. Für jede Lage von Q ist der Punkt P dann um einen bestimmten Winkel zu drehen, der ein beliebiges Vielfaches des Drehungswinkels von Q sein kann. Aus dieser Beschreibung ergibt sich der hier angeführte Algorithmus. Er

entspricht der geometrischen Vorgangsweise in obiger Konstruktion und folgt dabei deren sprachlicher Beschreibung. Mit dieser Folge von Befehlen kann die gesuchte Kurve ohne Schwierigkeiten gezeichnet werden. Die oben bereits erwähnte Eigenschaft des hier verwendeten CAS (Mathematica 7.0) ermöglicht die Ausgabe der Parameterdarstellung der

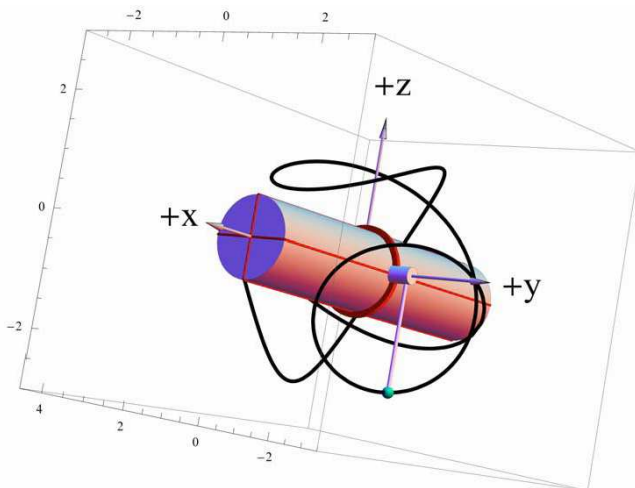
gesuchten Kurve. Dabei sei t die Winkelgeschwindigkeit der inneren Drehung, $k \cdot t$ sei die Winkelgeschwindigkeit der äußeren Drehung, rI sei

$$X(t) := \begin{cases} -rA \cdot \sin(k \cdot t) \\ rI \cdot \cos(t) + rA \cdot \cos(k \cdot t) \cdot \sin(t) \\ -rA \cdot \cos(t) \cdot \cos(k \cdot t) + rI \cdot \sin(t) \end{cases}$$

Radius der inneren Drehung und rA sei Radius der äußeren Drehung. Mit dieser Parameterdarstellung, die ohne „Rechnung“ be-

stimmt wurde, können nun unterschiedliche Fragen zum Verhalten der Mischmaschine beantwortet werden. Zu diesen Fragen zählen neben Geschwindigkeit und Beschleunigung auch die Gestalt der Kurve. Die letzte Abbildung zeigt die gesuchte Bahnkurve für ein Geschwindigkeitsverhältnis von 1:3.

Nachdem nun die Frage nach der Kurve beantwortet ist, kann man zur eingangs gestellten Frage zurückkehren und die Verwendung der Diagramme betrachten. Die wahrscheinlich zentrale Stelle im Lösungsweg findet man



in der dritten Abbildung. Da die räumliche Darstellung zu keiner erfolgreichen Beschreibung führt, muss die Fragestellung zwischendurch zweidimensional gedeutet werden. Vor allem aus diesen Diagrammen ist man in der Lage, die Hintereinanderausführung der Drehungen in einen Algorithmus zu überführen. Dabei geht die geometrische Beschreibung, die

sich am Diagrammen orientiert – also an Skizzen, die den Regeln der Geometrie folgend konstruiert und auch interpretiert werden – in eine (umgangs)sprachliche Beschreibung und dann in eine CAS-Beschreibung über. Aus den Diagrammen entwickelt sich der Algorithmus.

Literatur

- Hoffmann, M. (Hrsg.). (2003). *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Kadunz, G. (2006). Experiments with diagrams - a semiotic approach. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(6), 445-455.
- Katzenberger, M. (2006). *Die Rolle händischer Inskriptionen beim Lernen von Mathematik*. Dissertation, Universität Klagenfurt, Klagenfurt.
- Polya, G. (1995). *Schule des Denkens Vom Lösen mathematischer Probleme* (E. Behnke, Übers. 4 Aufl.). Tübingen, Basel: Francke.