

Barbara DROLLINGER-VETTER, Zürich

„Verstehenselemente“ im Mathematikunterricht

Ausgehend von kognitionspsychologischen und fachdidaktischen Vorstellungen von Verstehensprozessen lassen sich Merkmale jener Phasen im Mathematikunterricht bestimmen, in denen es darum geht, ein neues Konzept klar und verständlich einzuführen. Diese Merkmale lassen sich konzeptspezifisch, aber gleichzeitig unabhängig von den im Unterricht verwendeten Methoden und Handlungsformen formulieren. Grundlage dazu ist der Begriff des „Verstehenselements“.

1. Mathematik verstehen

Verstehen gilt als zentrales Ziel des Mathematikunterrichts. Reusser und Reusser-Weyeneth (1994) beschreiben in ihren acht fachübergreifenden Strukturmerkmalen von Verstehen das Verstehen unter anderem als kognitive Konstruktion, die auf Sinnvollheit bezogen ist und einen nach vorne offenen Vorgang darstellt. Mathematik verstehen wird auch innerhalb der Mathematikdidaktik von verschiedenen Autoren mit dem Herstellen von Verknüpfungen und Sinn in Verbindung gebracht (z. B. Hiebert & Carpenter, 1992). Was Mathematik verstehen bedeutet, hängt insbesondere vom Bild von Mathematik und vom zugrundeliegenden Lehr-Lernverständnis ab. Aus der kognitionspsychologischen Sicht von Aebli (1994, 2001) bedeutet Verstehen Aufbau von kognitiven Strukturen. Diese bestehen aus Elementen des Vorwissens, welche durch Relationen miteinander verknüpft werden. Neue Elemente des Denkens, insbesondere Elemente höherer Ordnung, entstehen durch Verdichten (Aebli sagt Objektivieren) von vorhandenen Netzwerkteilen. Diese neuen Elemente können wiederum mit weiteren Elementen in Verbindung gebracht werden. Entscheidend ist, dass in einem verdichteten Element die ganze Information vorhanden ist, dass es also jederzeit in alle seine Teilelemente und deren Beziehungen untereinander aufgefaltet werden kann.

Solche Teilelemente eines Konzepts, welche man verstanden haben muss, um das Konzept als Ganzes verstehen zu können, nenne ich „Verstehenselemente“ (vgl. Drollinger-Vetter, in Vorb.). Entscheidend ist, dass in diesem Begriff gleichzeitig sowohl kognitionspsychologische als auch fachdidaktische Aspekte enthalten sind. Verstehenselemente berücksichtigen sowohl das Vorwissen der Lernenden als auch die fachliche Seite des zu verstehenden Konzepts, wobei letztere aus der Sicht der Lernenden gedacht wird. Für eine Einführung in den Satz des Pythagoras lassen sich bei-

spielsweise unter anderen folgende zentrale Verstehenselemente bestimmen:

- Ausgangslage ist ein rechtwinkliges Dreieck.
- Es geht um zwei Typen von Seiten (im rechtwinkligen Dreieck).
- Der Satz macht eine Aussage über Seitenlängen (im rechtwinkligen Dreieck).
- Der Satz macht eine Aussage über Flächeninhalte von Quadraten, die speziell angeordnet sind.

Diese und weitere Verstehenselemente müssen Schülerinnen und Schüler in einem kognitiven Aufbauprozess geeignet miteinander verknüpfen, damit sie den Satz des Pythagoras verstehen, wobei die Verknüpfungen sowohl bildlich als auch sprachlich und formal (Bruner, 1974) gedacht und dargestellt werden können.

Welche Konsequenzen lassen sich daraus für Qualitätsmerkmale eines Unterrichts ableiten, in dem die Lernenden ein neues Konzept, hier den Satz des Pythagoras, verstehen sollen? Oder anders gefragt: Welche beobachtbaren inhaltspezifischen Unterrichtsmerkmale lassen aus dieser Sicht auf gelingende Verstehensprozesse der Schülerinnen und Schüler während einer Einführungsphase schließen?

Angenommen wird, dass diese Verstehenselemente im Unterricht ausführlich vorkommen und miteinander in kohärenter Art und Weise in Beziehung gesetzt werden müssen. Dies kann auf sehr unterschiedliche Art und Weise und auch in verschiedensten Reihenfolgen geschehen: Beispielsweise kann die Bedeutung des rechten Winkels während eines Einstiegsproblems thematisiert oder innerhalb des Beweises explizit herausgearbeitet werden. Die Voraussetzung des rechten Winkels kann in einem Theoriehefteintrag besonders betont oder aber innerhalb einer üblichen sprachlichen Formulierung des Satzes eher versteckt erwähnt werden. Bei den Übungen können Beispiele zu nicht-rechtwinkligen Dreiecken vorkommen. Es ist weiter ein Unterricht denkbar, in dem zwar immer mit rechtwinkligen Dreiecken gearbeitet wird, in dem aber diese Voraussetzung nie explizit thematisiert wird, so dass dieses Verstehenselement für die Lernenden gar nicht deutlich wird.

Eine wesentliche Qualität dieser Verstehenselemente zeigt sich in ihrem Nutzen für die Einschätzung von Unterrichtsqualität: Sie lassen sich unabhängig von den im Unterricht verwendeten Aufgaben, aber auch unabhängig von der gewählten Methode und den eingesetzten Sozialformen bestimmen. Der Unterricht kann nicht nur in Bezug auf das Vorkommen,

sondern auch hinsichtlich der Kohärenz und Klarheit dieser Verstehenselemente im zeitlichen Verlauf in seiner Qualität eingeschätzt werden. Damit erhält man ein konzeptspezifisches inhaltliches Maß für die Klarheit des Unterrichts im Verlauf. Ein Beispiel soll dies illustrieren: Ein Einstieg, der mit den Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck arbeitet, und ein Beweis, der mit den Flächeninhalten der Quadrate argumentiert, müssen im Unterricht sorgfältig miteinander verbunden werden, damit aus der Sicht der Lernenden kein Bruch entsteht, der das Verstehen behindern kann.

Selbstverständlich gehört zu einem umfassenden Verständnis des Satzes des Pythagoras mehr als die oben erwähnten Verstehenselemente; man vergleiche zum Beispiel Winter (1984), Wittmann (1996) oder Fraedrich (1995). Grundlegend für ein erstes Verständnis des Satzes im engen Sinne erscheinen aber aus der oben beschriebenen kognitionspsychologischen Perspektive die erwähnten Verstehenselemente, welche im Laufe des folgenden Unterrichts mit vielen weiteren Wissensselementen verknüpft und in Beziehung gebracht werden müssen.

2. Empirischer Teil

Mit der binationalen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“ (Projektleitung: Eckhard Klieme, Christine Pauli, Kurt Reusser; vgl. Klieme & Reusser, 2003; Lipowsky, Rakoczy, Klieme, Reusser & Pauli, 2005) liegt ein Forschungsdesign vor, das es erlaubt, solche konzeptspezifische Unterrichtsqualitätsmerkmale zu erheben und mit Leistungsdaten mehrebenenanalytisch in Beziehung zu setzen. U.a. wurde in 40 Klassen eine dreistündige Einführung in den Satz des Pythagoras videografiert und es wurden Leistungstests durchgeführt. Die Verstehenselemente wurden mittel-inferent über die Theoriephasen der videografierten Unterrichtseinheiten geratet, das genaue Vorgehen ist in Drollinger-Vetter und Lipowsky (2006) beschrieben. Aus den zentralen Verstehenselementen lässt sich ein Summenscore bilden, der mit Leistungsdaten in Beziehung gesetzt werden kann. In einer Mehrebenenanalyse (zur Methode vgl. Hox, 2002) zeigt sich unter Kontrolle verschiedener Variablen auf der Individualebene ein Effekt des Verstehenselemente-Scores auf den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler.

Daraus lässt sich folgern, dass Verstehenselemente auch für die Planung und Durchführung eines verstehensbezogenen Unterrichts und somit für die Lehrerbildung hilfreich sein könnten. Denn Verstehenselemente lassen sich zu jedem mathematischen Thema bestimmen, wobei die fachdidaktischen Eigenheiten des vorliegenden Stoffs berücksichtigt werden müssen.

Eine ausführliche Darstellung dieses Themas findet man in Drollinger-Vetter (in Vorb.).

Literatur

- Aebli, H. (1994). *Denken. Das Ordnen des Tuns. Band II: Denkprozesse* (2. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.
- Aebli, H. (2001). *Zwölf Grundformen des Lehrens* (11. Aufl.). Stuttgart: Klett.
- Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.
- Drollinger-Vetter, B. & Lipowsky, F. (2006). Fachdidaktische Qualität der Theoriephasen. In I. Hugener, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Videoanalysen (= Teil 3 der Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis"*, hrsg. E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser, S. 189-205). Frankfurt a. M.: GPPF/DIPF.
- Drollinger-Vetter, B. (in Vorb.). *Fachdidaktischer Strukturaufbau*. Dissertation Universität Zürich.
- Fraedrich, A.M. (1995). *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Mannheim: Wissenschaftsverlag.
- Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65-97). New York: Macmillan.
- Hox, J. (2002). *Multilevel analysis: techniques and applications*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.
- Klieme, E. & Reusser, K. (2003). Unterrichtsqualität und mathematisches Verständnis im internationalen Vergleich. Ein Forschungsprojekt und erste Schritte zur Realisierung. *Unterrichtswissenschaft*, 31 (3), 194-205.
- Lipowsky, F., Rakoczy, K., Klieme, E., Reusser, K. & Pauli, C. (2005). Unterrichtsqualität im Schnittpunkt unterschiedlicher Perspektiven - Rahmenkonzept und erste Ergebnisse einer binationalen Studie zum Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. In H.G. Holtappels & K. Höhmann (Hrsg.), *Schulentwicklung und Schulwirksamkeit. Systemsteuerung, Bildungschancen und Entwicklung der Schule* (S. 223-238). Weinheim: Juventa.
- Reusser, K. & Reusser-Weyeneth, M. (1994). Verstehen als psychologischer Prozess und als didaktische Aufgabe: Einführung und Überblick. In K. Reusser & M. Reusser-Weyeneth (Hrsg.), *Verstehen: Psychologischer Prozess und didaktische Aufgabe* (S. 9-35). Bern: Hans Huber.
- Winter, H. (1984). Satzgruppe des Pythagoras. *mathematik lehren*, 2, 42-48.
- Wittmann, E.C. (1996). Designing Teaching: The Pythagorean Theorem. In T. Cooney (Hrsg.), *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education* (S. 97-165). Portsmouth: Heinemann.