Matthias BRANDL, Augsburg

Lernumgebungen zur Begabtenförderung am Gymnasium

1. Begabte fördern – Warum?

Der Deutsche Philologenverband hat am 08.01.2008 in einer Presseerklärung auf einen „Missklang“ in der Verhältnismäßigkeit hinsichtlich Förderung schwacher vs. begabter Schüler hingewiesen:

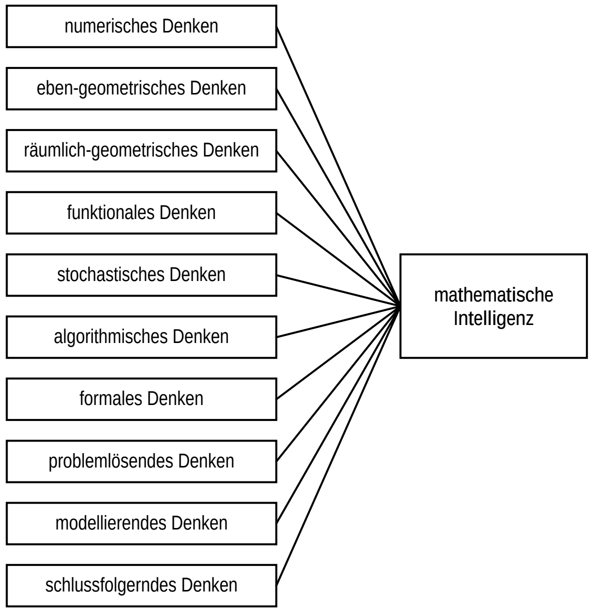
„Deutschland tut zu wenig für seine besonders begabten und hochbegabten Schülerinnen und Schüler. […] Zu Recht haben die Anstrengungen in den letzten Jahren vor allem der zu großen Gruppe von Risikoschülern gegolten, die bei den internationalen Tests nicht einmal die Kompetenzstufe 1 erreicht haben. […] Für die zu besonderen Leistungen fähigen Spitzenschüler gibt es bisher zu geringe spezielle Förderung, zu wenig Pluskurse und Zusatzangebote. Das Bekenntnis zur individuellen Förderung muss aber diese Schülergruppe mit einschließen und darf sich nicht auf Angebote für schwächere Lernende beschränken!“

2. Begabte fördern – Wen?

Um (hoch)begabte Schüler zu identifizieren bieten sich traditionell herkömmliche IQ-Tests an. Der damit gemessene Intelligenzquotient (IQ) wird als normalverteilt mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 15 angenommen. Als hochbegabt wird gemeinhin jemand bezeichnet, dessen IQ um mindestens 2 Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt liegt, also mindest 130 beträgt.

Unter obiger Annahme der Normalverteilung ergibt sich damit in einer (hinreichend großen) Stichprobe ein Anteil von 2% Hochbegabten. Eine einfache Überlegung in Form einer Fermi-Aufgabe lässt uns abschätzen, wie viele Schüler dies pro Gymnasium sind: z.B. hat das Bundesland Bayern 12 Millionen Einwohner; 2% davon ergeben 240.000 potenziell hochbegabte Personen. Nehmen wir an, dass solch ein Begabter etwa ein Sechstel seines Lebens in der Schule verbringt, so landen wir bei aktuell 40.000 hochbegabten Schülern. Vermutlich besuchen nicht alle ein Gymnasium, aber vielleicht etwa 25.000. Bei rund 400 Gymnasien in Bayern ergeben sich am Ende etwa 60 hochbegabte Schüler pro Gymnasium – was durchaus eine nennenswerte Anzahl und beileibe keine verschwindende Randgruppe ist.

An der Universität Augsburg arbeiten wir mit folgendem differenzierten Modell mathematischer Begabung, das als theoretische Grundlage mehrerer Projekte dient:



Dieses Modell lässt sich für schulische Diagnose- und Förderzwecke in ein umfassenderes Modell für mathematische Begabung (wie z.B. das „Münchner Hochbegabungsmodell“ in Heller, K., Perleth, C. (2007)) einbetten, das neben sprachlichen Fähigkeiten auch die Trennung von Begabung und Leistung berücksichtigt.

3. Begabte fördern – Wie?

Die Förderung mathematisch begabter Schüler kann zum einen über Zusatzangebote an der Schule (sog. Enrichmentprogramme wie Pluskurse, Begabtenzüge,…) oder Binnendifferenzierung bzw. offene Arbeitsformen im regulären Mathematikunterricht geschehen (vgl. z.B. Bruder, R. (2006) und Ulm, V. (2007)). Die folgenden beiden kurz skizzierten Unterrichtseinheiten eignen sich je nach Umsetzung für beiderlei Wege und decken gleichzeitig einen Großteil der in Abschnitt 2 angesprochenen Facetten mathematischer Intelligenz ab. Im Anschluss wird das Konzept einer „Mathematischen Landkarte“ vorgestellt, das es dem Schüler erlaubt, mathematisches Wissen in einem historischen Kontext zu vernetzen.

3.1 Von Kegeln zu höheren algebraischen Kurven und wieder zurück

Ausgangspunkt der Unterrichtseinheit/Lernumgebung Brandl, M. (2008a) ist eine harmlos erscheinende Aufgabe, in deren Zentrum die Maximierung eines Kegelvolumens steht. Das Problem wird zunächst praktisch, dann theoretisch angegangen und entwickelt sich schließlich zu einer verblüffenden Fundgrube geometrischer Zusammenhänge. Im Laufe der Beschäftigung mit den verschiedenen Aspekten des Themas ergeben sich anspruchsvolle Fragestellungen und überraschende Zusammenhänge.

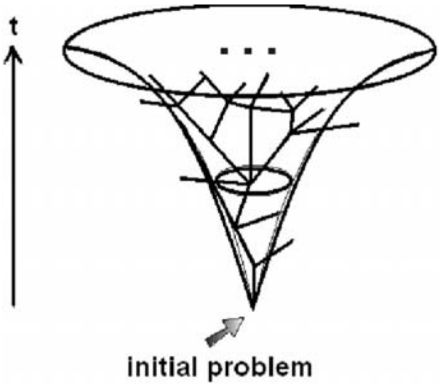
Die Schüler werden ausgehend von einer Reihe realer Papierkegel unterschiedlicher Öffnungswinkel auf den nicht-linearen Zusammenhang zwischen dem Volumen eines Kegels und seinem Öffnungswinkel geführt. Nachdem dies rein intuitiv festgestellt wird, taucht dieser Aspekt in der algebraischen Herleitung der entsprechenden Formel wieder auf. Durch Spiegelung des Graphen der Volumenfunktion an den Koordinatenachsen entsteht eine Kurve, die im Weiteren durch elementare Umformungen vorbei an der Lemniskate von Jakob Bernoulli hin zur Tschirnhaus-Kubik führt. Die Kurven sollen dabei mit einem CAS erzeugt werden. Die Eigenschaft der Tschirnhaus-Kubik als Katakaustik der Parabel lässt sich dabei sehr einfach und schön mit einem dynamischen Geometrieprogramm darstellen. Über die Kegelschnitte kommt der Schüler von der Parabel zurück zu seinem Ausgangskörper – dem Kegel. Dieser Zirkel zeigt dem Schüler einen großen Zusammenhang im Gebäude der Mathematik auf und soll ihn ermuntern, selbstständig auf weitere Entdeckungsreisen zu gehen.

Eine detaillierte Ausarbeitung der Thematik findet sich in Brandl, M. (2008c).

3.2 Geometrie mit POV-Ray – platonische Körper und dichteste Kugelpackungen

In der Lernumgebung Brandl, M. (2008b) klären die Schüler ausgehend von der Betrachtung einer Kugel im Raum die ersten geometrischen Überlegungen durch Anfertigung von geeigneten Schnittbildern. Dadurch werden Probleme der räumlichen Geometrie auf elementargeometrische Fragestellungen in der Ebene reduziert. Parallel wird das kostenlose 3D-Programm POV-Ray zur Visualisierung herangezogen, das bereits in Filler, A. (2007) hinsichtlich seines didaktischen Potenzials im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II untersucht und empfohlen wurde. Als Grundlage wird die Datei basis.pov zur Verfügung gestellt, welche einen Hintergrund, eine geeignete Kameraperspektive und eine Lichtquelle erzeugt. Darauf aufbauend sollen die Schüler mit Hilfe geeigneter Funktionen wie sphere{}, cone{} oder cylinder{} einen neuen Körper sukzessive zusammenbauen und darstellen. Der Körper entsteht durch geschicktes Aufsetzen von Kegeln auf die Kugel. Hierdurch entstehen glatte Übergänge, so dass die paarweise Verbindung von je zwei Kegelspitzen einen neuen Körper (Oktaeder) entstehen lässt, in den die Kegel-Kugel-Kombination „nahtlos verpackt“ ist. Die Frage nach einem „dichten“ Ausfüllen des Oktaeder-Gitters mit sechs kleinen Kugeln führt nach der geometrischen und computergrafischen Lösung auf das Problem nach der dichtesten Kugelpackung. Die Schüler sollen hierzu selbstständig recherchieren, ihre Funde präsentieren und eine dieser Packungen mit POV-Ray realisieren.

3.3 Mathematischen Landkarten



Mit dem Begriff „Mathematische Landkarte“ bezeichnen wir eine (gerade im Entstehen begriffene) online-Lernumgebung, die mathematische Inhalte in einem kausal-historischen Kontext darstellt. Konkret handelt es sich um eine Art „virtuellen Baum“ ähnlich zur MathMap des Mathematical Atlas (http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/mathmap.htm), aber mit einer zusätzlichen zeitlichen Komponente und schulmathematischen Inhalten. Damit wird dem Schüler eine unterstützende Lernstruktur in Form eines „Gerüsts“ geboten, das mathematische Lerninhalte in ihrem Evolutionsprozess miteinander vernetzt und ihre Bedeutung ausgehend von einem Initialproblem aufzeigt. Als Beispiel für einen geeigneten Inhalt einer Mathematischen Landkarte verweisen wir auf Brandl, M. (2009).

Literatur

Brandl, M. (2009). The vibrating string – an initial problem for modern mathematics; historical and didactical aspects. In *Proceedings of the 18th Novembertagung* (S.79-98). Berlin: logos Verlag.

Brandl, M. (2008c). Kegel, Ellipse und Tschirnhaus-Kubik – eine Metamorphose. Preprint des Instituts für Mathematik der Universität Augsburg. Nr. 28/2008. http://www.opus-bayern.de/uni-augsburg/volltexte/2008/1303/

Brandl, M. (2008b). Geometrie mit POV-Ray – platonische Körper und dichteste Kugelpackungen. Unterrichtseinheit bei lehrer-online im Rahmen des Portals „Begabte fördern“. http://www.lehrer-online.de/platonische-koerper-povray.php

Brandl, M. (2008a). Von Kegeln zu höheren algebraischen Kurven und wieder zurück. Unterrichtseinheit bei lehrer-online im Rahmen des Portals „Begabte fördern“. http://www.lehrer-online.de/675751.php

Bruder, R. (2006). Erläuterungen zu Modul 1 – Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht. http://sinus-transfer.de

Filler, A. (2007). *Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie.* Humboldt-Universität Berlin: Habilitationsschrift.

Heller, K., Perleth, C. (2007): Talentförderung und Hochbegabung in Deutschland. In Heller K., Ziegler, A. (Hrsg.): *Begabt sein in Deutschland* (S.139-170). Berlin: LIT Verlag.

Ulm, V. (2007). *Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen.* Seelze: Kallmeyer.