

Guido PINKERNELL, Darmstadt

## **Konsequente Technologieorientierung am Beispiel Funktionalen Denkens**

Die nachfolgenden Überlegungen basieren auf Erfahrungen, die in dem seit 2005 laufenden Schulprojekt CALiMERO gemacht wurden. In diesem bis 2010 andauernden Projekt wird ein Unterrichtskonzept zum Einsatz von CAS-fähigen Taschencomputern im niedersächsischen Gymnasien von Klasse 7 bis 10 entwickelt und mehrfach erprobt. In den begleitend hierzu veröffentlichten Materialienbänden (Bruder 2007ff.) findet man einen Teil der nachfolgenden Aufgabenideen in ihrem eigentlichen Zusammenhang, der an dieser Stelle natürlich nicht wiedergegeben werden kann.

Konsequente Technologieorientierung bedeutet hier wie im Projekt CALiMERO nicht, dass der Zugang zu den mathematischen Inhalten nur noch vermittels Rechner geschieht. Das ist insbesondere auch nicht bei der Einführung des Variablen- oder Funktionsbegriffs der Fall, wie man sich anhand der der Vielzahl an enaktiven, an geometrischen und anderen anwendungsorientierten Fragestellungen gebundenen Aufgaben überzeugen kann. Konsequente Technologieorientierung heißt aber, dass der Taschencomputer immer dann eingesetzt wird, wenn dies sinnvoll erscheint. Dazu aber gehört zwingend, dass er von Schülern wie Lehrern als ein selbstverständliches Werkzeug im Unterrichtsalltag akzeptiert ist. Ein nur punktueller Einsatz erscheint wegen der sich so überlagernden Bedienungsschwierigkeiten bei Schülern und Lehrkräften mit Problemen behaftet (Drijvers 2003), die sich bei ständig wechselnden Softwareplattformen verschärfen dürften.

Eine Besonderheit des Projekts CALiMERO ist, dass hier Fachdidaktikern und Lehrern die Zeit und der Raum gegeben wird, gemeinsam den Technologieeinsatz in konkreten Unterrichtsmaterialien gründlich zu konzipieren, in vielen Lerngruppen gleich mehrfach zu erproben und für die nachfolgenden Jahrgänge verbessern zu können (Pinkernell 2009). Die folgenden Ausführungen sollen einen Eindruck geben, wie weit diese Überlegungen für das Thema „Funktionales Denken“ reichen.

### **1. Funktionen zuerst, Gleichungslöseverfahren später**

Ein Blick gängige Schulbücher zeigt: Die Schüler lernen einen neuen Funktionstyp erst dann kennen, nachdem sie sich mit entsprechenden Gleichungslöseverfahren beschäftigt haben. Das ist auf den ersten Blick nachvollziehbar. Denn wie kann die Frage nach Nullstellen einer quadratischen Funktion beantwortet werden, wenn nicht zuvor gelernt worden ist, wie man eine quadratische Gleichung löst?

Bei CALiMERO hat man sich entschieden, diese Reihenfolge umzukehren (siehe Inhaltsverzeichnis rechts). Dass bei Verfügbarkeit eines GTR oder CAS das Beherrschen algebraische Gleichungslöseverfahren nicht mehr unbedingte Voraussetzung ist für das Arbeiten mit Funktionen ist bekannt: Fragen nach besonderen Eigenschaften einer Funktion können tabellarisch und/oder graphisch gelöst werden. Wesentlicher Beweggrund dieser Umstrukturierung ist aber, dass so die Auseinandersetzung mit den Funktionen und ihren Darstellungen in den Mittelpunkt rückt – auch bei der sich anschließenden Behandlung von Gleichungslöseverfahren. Denn wenn zuvor die Arbeit mit Tabelle und Graph großen Raum eingenommen hat, liegen diese numerischen Methoden auch bei der Lösung von Gleichungen nahe (siehe Aufgabe rechts). Äquivalenzumformungen, insbesondere „händische“, sind zwar im Umfang reduziert, aber weiterhin Teil des Lehrgangs. Nur tritt hier das exakte algebraische Verfahren erst dann in Erscheinung, wenn an geeigneten Aufgabenstellungen gezeigt wird, dass die ungenauen numerischen Lösungen nicht zufrieden stellen.

## 1. Lineare Funktionen

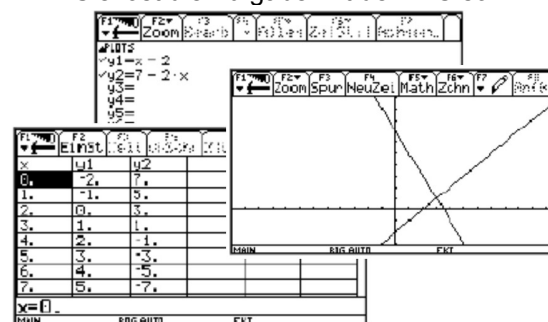
- 1.1. Die lineare Funktion
- 1.2. Funktionenschar
- 1.3. Steigung und Änderungsrate
- 1.4. Geradengleichung bestimmen
- 1.5. Funktionsbegriff
- 1.6. Geraden durch Punktwolken

## 2. Lineare Gleichungen

- 2.1. Lösen von Gleichungen durch Tabelle und Graph
- 2.2. Äquivalenzumformungen
- ...

Helga hat die Aufgabe erhalten eine Zahl  $x$  zu finden, die die Gleichung  $x - 2 = 7 - 2x$  erfüllt.

Sie löst die Aufgabe mit dem TC so:



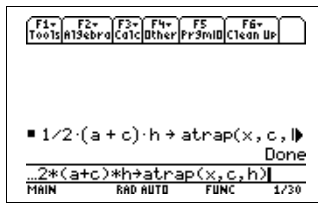
Welche Lösung hat sie gefunden?  
Erkläre, wie sie vorgegangen ist.

## 2. Abhängigkeiten zwischen geometrischen Größen untersuchen

Dem Funktionalen Denken als Leitidee entspricht, dass die Betrachtung funktionaler Zusammenhänge sich nicht auf die Inhaltsbereiche beschränkt, die das Wort „Funktion“ im Titel führen. Konkretisiert hat das vor kurzem erst wieder Hoffkamp (2008) für die DGS Cinderella. Die in CALiMERO verwendete TI-Voyage-Technologie erlaubt diese dynamisierte Vernetzung von geometrischen und funktionalen Objekten nicht. Doch auch hier ist es möglich, Formeln unter einem funktionalen Aspekt zu behandeln.

Aufgaben wie die unten gezeigte werden den Schülern vorgelegt, nachdem sie sich mit Flächeninhalts- und anderen Formeln in einem geometrischen Kontext ausführlich beschäftigt und für die Ausbildung erster Termkompe-

tenzen genutzt haben. Jetzt sind sie aufgefordert, diese Formeln aus einem funktionalen Blickwinkel zu untersuchen. Der Term tritt in den Hintergrund, indem er durch das Abspeichern als „Macro“ hinter dem Namen atrap versteckt wird. Der funktionale Zusammenhang wird also anhand von Zeichnungen und Funktionsgraphen untersucht, die ihrerseits wieder hinsichtlich ihrer Bedeutung für den geometrischen Kontext interpretiert werden müssen.



(i) atrap(6,4,x)  
(ii) atrap(6,x,2)  
(iii) atrap(x,4,2)

1. Skizziere für jeden der Fälle (i), (ii) und (iii) drei Trapeze und beschreibe, wie die Trapeze sich ändern, wenn man x ändert.
2. Erkläre das Ergebnis für  $x = 0$  geometrisch.
3. Skizziere jeweils für (i), (ii) und (iii) den Graphen der Zuordnung  $x \rightarrow \text{Trapezfläche}$ .
4. Welche Bedeutung haben die Schnittpunkte?

### 3. Termunabhängiges Arbeiten mit Funktionen

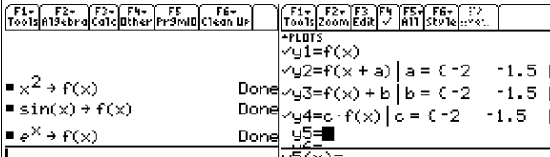
Das Verschieben, Strecken und Stauchen von Funktionsgraphen führen die Schüler in der Sekundarstufe I mehrfach durch, immer dann, wenn ein neuer Funktionstyp eingeführt wird. Sinnvoll erscheinen diese Übungen, wenn sie die Anpassung von Funktionen an gegebene Datensätze im Rahmen von Modellierungsaufgaben zum Ziel haben. Dabei gelingt es aber kaum, die Gemeinsamkeit dieser geometrischen Operationen für alle behandelten Funktionstypen herauszuarbeiten, wenn bei jedem Funktionstyp die Parameter neu zu interpretieren sind. Man vergleiche hierzu  $f(x) = a \cdot x + b$  und  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Vor diesem Hintergrund erscheint es wenig verwunderlich, dass mit den Parametern weitaus mehr Zeit verwendet wird als für das verständige Modellieren selbst, nämlich die qualitativ begründete Auswahl eines passenden Funktionstyps noch vor seiner quantitativen Anpassung.

Die notwendige Vereinheitlichung des Umgangs mit Funktionen wird erreicht, wenn man die Gesamtheit der Funktionen durch den Ausdruck „f(x)“ repräsentiert und ihre Veränderungen durch Parametervariationen auf f(x) untersucht. Im CAS ist hierzu der jeweilige Ausgangsterm unter f(x) zu speichern, was dann Gegenstand der weiteren Untersuchungen ist (siehe Graphik rechts). (Weil der Term nicht in Erscheinung tritt, könnte man diesen Zugang

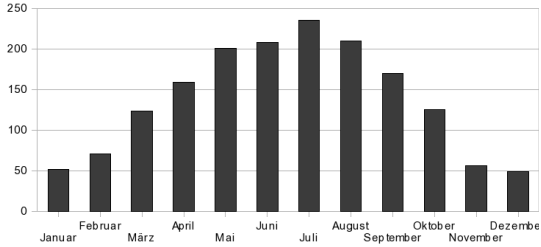
**mathematische Perspektive:**

	$f(x + a)$	$f(x) + b$	$c \cdot f(x)$
<b>Quadr.</b>			
<b>Trig.</b>			
<b>Exp.</b>			

**Schülerperspektive**



auch als „terminunabhängig“ bezeichnen.) Es sind eine Reihe von Aufgaben denkbar, die diese objektorientierte Behandlung von Funktionen erweitern:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verschiebe einen selbst gewählten Graphen zuerst und dann strecke. Kehre um. Vergleiche. Ist das bei jeder Verknüpfung von Verschiebung und Streckung so?</li> <li>• Spiegele den Graphen der Normalparabel an der x-Achse. Wie kann man vorgehen?</li> <li>• Verschiebe eine Normalparabel um 3 Einheiten in x-Richtung und 2 Einheiten gegen die y-Richtung. Der neue Funktions-term lässt sich mithilfe der Scheitelpunktsform schnell angeben. Wie lautet er?</li> <li>• Konrad verschiebt den Graphen der Funktion <math>f(x) = 2x</math> um 3 Einheiten nach rechts und um 6 Einheiten nach oben. Er stellt überrascht fest: „Der Graph hat sich überhaupt nicht verändert!“ Er hat Recht! Wie kommt das? Erkläre anhand des Funktionsterms!</li> </ul>	 <table border="1"> <caption>Mittlere Sonnenscheindauer in Stuttgart (in Minuten)</caption> <thead> <tr> <th>Monat</th> <th>Mittlere Sonnenscheindauer (Minuten)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Januar</td><td>50</td></tr> <tr><td>Februar</td><td>70</td></tr> <tr><td>März</td><td>120</td></tr> <tr><td>April</td><td>160</td></tr> <tr><td>Mai</td><td>200</td></tr> <tr><td>Juni</td><td>210</td></tr> <tr><td>Juli</td><td>230</td></tr> <tr><td>August</td><td>210</td></tr> <tr><td>September</td><td>170</td></tr> <tr><td>Oktober</td><td>130</td></tr> <tr><td>November</td><td>60</td></tr> <tr><td>Dezember</td><td>50</td></tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Säulengraphik zeigt die mittlere Sonnenscheindauer in Stuttgart im Verlauf eines Jahres.</li> </ul> <p>Überlege für jeden dir bekannten Funktionstyp, inwieweit er für die Modellierung geeignet ist. Für welchen entscheidest du dich?</p> <p>Passe nun die Ausgangsfunktion des gewählten Funktionstyps den Daten an.</p>	Monat	Mittlere Sonnenscheindauer (Minuten)	Januar	50	Februar	70	März	120	April	160	Mai	200	Juni	210	Juli	230	August	210	September	170	Oktober	130	November	60	Dezember	50
Monat	Mittlere Sonnenscheindauer (Minuten)																										
Januar	50																										
Februar	70																										
März	120																										
April	160																										
Mai	200																										
Juni	210																										
Juli	230																										
August	210																										
September	170																										
Oktober	130																										
November	60																										
Dezember	50																										

#### 4. Schlußbemerkung

Diese Überlegungen sind das Ergebnis ausgiebiger Erprobungen und Diskussionen in CALiMERO. Unumstritten sind sie damit nicht. Kollegen begrüßen die Umstrukturierung der Einheiten zu Funktionen, ihre Erfahrungen bzgl. der funktionalen Behandlung geometrischer Formeln sind dagegen gemischt. Die Gründe bleiben zu überprüfen. Denkbar ist eine mangelnde Vertrautheit mit den Aufgabenideen. Denkbar ist auch, dass sie dem Lernalter nicht ausreichend angepasst sind. Spannend wäre die Umsetzung dieser Ideen auf den TI-Nspire, bei dem eine unmittelbare Vernetzung der geometrischen und funktionalen Darstellungen möglich ist. Im Nachfolgeprojekt MABIKOM ist hierzu Gelegenheit.

#### Literatur

- Bruder, R., Weiskirch, W. (2007 ff.). *CALiMERO – Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren*. Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler sowie methodische und didaktische Handreichungen. Münster: WWU
- Drijvers, P.H.M (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment*. Utrecht: Freudenthal Institute
- Hoffkamp, A. (2008). Wie kann man mit dynamischer Geometrie Software funktionales Denken fördern? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Bad Salzdetfurth: Franzbecker
- Körner, H. (2008). Schulversuch CALiMERO. *Computeralgebra-Rundbrief*, 43, 26-30
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg
- Pinkernell, G. (2009). Kooperation im Schulprojekt. *mathematik lehren*, 152, 46-48